CHAPITRE IV

L'EXISTENCE DE L'INFINI

La préoccupation centrale et primordiale d'Aristote tout au long de son enquête sur l'infini, c'est de montrer qu'il n'existe pas de corps sensible infini en acte. C'est principalement dans le livre III de sa Physique et dans son traité Du Ciel qu'il livre ses opinions sur le sujet. Malgré les différences qui les marquent -différences déjà signalées et qu'il est inutile de rappeler-, ces deux oeuvres aboutissent à une même conclusion: il n'existe pas de corps sensible infini en acte[1].

---

[1] Il n'est peut-être pas superflu de rapprocher, ici même, quelques opinions. Rappelons d'abord la position d'Aristote. Celui-ci rejette l'infini du monde sensible, mais il n'a jamais exploré les possibilités d'une multitude infinie en acte dans le monde intelligible et spirituel. Quant au monde mathématique, rien ne nous autorise à penser qu'il a soutenu l'existence de l'infini en acte dans la quantité continue ou dans la quantité discrète. Ajoutons à cela l'opinion d'un mathématicien contemporain qui n'a aucun scrupule à admettre l'existence de l'infini en acte sur le plan des mathématiques pures, mais qui l'exclut de l'univers matériel. Dans Abstract Set Theory, Amsterdam, North-Holland, 1953, p.9, Abraham A. Fraenkel écrit: "As a metter of fact, the recent research in physics has in increasing measure convinced us that the exploration of nature cannot lead to either infinitely large or infinitely small magnitudes. The assumption of a finite extend of the physical

L'étude en cours, il importe de le redire, ne vise aucunement à décrire jusqu'au moindre iota l'enseignement d'Aristote sur l'infini; elle entend plutôt comparer la position aristotélicienne et scolastique sur l'infini avec celle des mathématiciens contemporains. Or, à cette fin, il n'est pas nécessaire de retenir toute la doctrine d'Aristote sur le sujet; il suffit

---

space as well as the assumption of a only finite divisibility of matter and energy (so that the smallest particles of matter and energy are finite) completely harmonizes with experience. It thus seems that the external world can afford us nothing but finite sets". En revanche, la conception marxiste de l'univers est toute différente. Elle a été élaborée en bonne partie par Engels dont la préoccupation constante fut d'écarter toute théorie qui, de près ou de loin, directement ou indirectement, amènerait à poser un commencement aux choses et, par suite, l'action d'une cause créatrice. Pour lui, la matière et le mouvement qui en est inséparable sont éternels: ils sont inengendrés et indestructibles. Grâce au "Cycle éternel de la matière et du mouvement", des mondes infinis naissent et meurent éternellement. "Du reste, écrit Engels, la succession des mondes éternellement répétée dans le temps infini n'est que le complément logique de la coexistence de mondes innombrables dans l'espace infini..." (Dialectique de la nature, Paris, Marcel Rivière, 1950, p.45). La conception matérialiste et dialectique de l'univers qui inspire le parti communiste actuel et les savants soviétiques -dans la mesure où ils suivent la 'ligne du parti'- n'a guère changé depuis Engels. Maxim W. Mikulak en énonce brièvement les principaux articles qui, en réalité, sont des présupposés: "... (1) L'univers est infini dans l'espace et éternel dans sa durée; (2) toute matière et tout mouvement (énergie) sont sans commencement ni fin, sont indestructibles aussi bien qu'inépuisables. (3) Il est impossible pour l'univers de s'épuiser à la façon d'une machine. Et (4) l'extrapolation de lois physiques, régissant des systèmes locaux ou fermés, à l'univers dans sa totalité est méthodologiquement inacceptable. Et l'on peut croire que tout modèle cosmologique qui s'appuie sur des présuppositions contraires aux quatre précédentes, encourt le risque d'être dénoncé et rejeté par les philosophes soviétiques et par ceux des astronomes soviétiques qui ont accepté le point de vue du matérialisme dialectique". (Soviet Philosophic-Cosmological Thought, dans Philosophy of Science, janv. 1958, p.41) d'en conserver la partie la plus fondamentale, la partie la plus commune. Tout ce qu'il y a, entre autres, d'arguments spécifiquement naturels -du reste, la plupart de ces arguments, mais pas tous, n'ont plus qu'un intérêt historique- peut être ignoré sans inconvénient dans la présente perspective. Nous nous bornerons donc désormais à la portion la plus fondamentale de cet enseignement. Comme elle se trouve tout entière dans le IIIe livre de la Physique, nous limiterons notre enquête à ce traité délaissant quasi totalement le traité Du Ciel.

Les raisons invoquée par Aristote, dans sa Physique, pour écarter la possibilité même d'un corps sensible infini en acte ne sont pas toutes de même nature. L'une, la toute première, est tirée de la notion même de corps telle que reçue par les mathématiciens[1]: pour eux, le corps est ce qui a longueur, largeur et profondeur et qui est limité par une ou plusieurs surfaces. S'il en est ainsi, il devient contradictoire de parler de corps infini[2]. Les autres raisons sont strictement naturelles: parmi elles, les unes sont relatives à la constitution des corps naturels et tendent à établir que le corps naturel aux dimensions infinies[3] est impossible, et à titre de corps

---

[1]Euclide, Eléments, XI, déf. 1 et 2.

2 Le nombre présente une situation analogue. Aristote le définissait comme une multitude finie ou encore comme une multitude mesurée par l'unité, deux formules équivalentes qui s'appellent l'une l'autre. Si telle est la nature du nombre, l'expression 'nombre infini' devient contradictoire.

3 L'argument d'Aristote relatif au corps mixte qui serait infini n'a perdu ni son intérêt ni sa valeur. Pour autant qu'il repose sur les quatre éléments alors reconnus, il a assurément vieilli et perdu sa valeur probante. Mais qu'on se donne la peine de le rebâtir en tenant compte du nombre des éléments reconnus par la chimie contemporaine et il retrouvera toute sa force probante.

et à titre de corps naturel, qu'en outre le corps naturel, simple ou composé, ne laisserait 'place' à aucun autre s'il était infini; les autres s'appuient sur ce qui accompagne nécessairement un corps sensible, à savoir le mouvement et le lieu.

Si, à partir de ces raisons, Aristote n'hésite pas à exclure la possibilité même d'un corps sensible infini, ce serait toutefois une erreur de croire qu'il nie pour autant toute forme d'existence de l'infini. Sa position est plus nuancée. Il ne lui paraît pas possible de poser l'infini de façon absolue; en revanche, il ne lui paraît pas davantage possible de le rejeter de façon absolue: pour lui, l'affirmation absolue, inconditionnée de l'infini, tout comme, du reste, sa négation absolue, mène à de fâcheuses conséquences, entraîne de graves inconvénients et engendre des situations impossibles. Il ne rejettera donc pas toutes les raisons sur lesquelles s'appuyaient ses devanciers pour poser l'infini. Parmi ces cinq raisons[1], il se verra forcé d'en retenir deux, plus précisément les deux premières. En fait, s'il fallait rejeter totalement l'infini, il faudrait faire face à cet épineux problème que constituerait alors l'éternité du monde, car le monde était infini dans le temps, comme le voulait l'opinion ancienne et commune. En outre, situation non moins grave, il faudrait soutenir que la grandeur n'est pas toujours divisible en grandeurs de même nature, que la divisibilité de la grandeur peut aboutir à des éléments qui ne sont plus des grandeurs ou, au moins, des grandeurs homogènes, ou, en d'autres termes, que la quantité n'est pas, par

[1] Elles ont été énumérées au chapitre IV.

nature, divisible en parties intégrantes et homogènes, ce qui serait purement et simplement rejeter la notion même de quantité. Après avoir souligné la valeur de ces deux raisons, Aristote n'en retiendra pourtant qu'une seule pour établir les fondements de sa propre doctrine de l'infini, celle notamment qui tient à la divisibilité de la grandeur; l'étude de l'infinité du temps n'apparaîtra que plus tard, dans le traité Du Ciel. On s'étonnera peut-être des modalités de son processus. Pourtant il n'y a là rien que de normal. Qu'il suffise de rappeler que grandeur, mouvement et temps forment une suite où chaque membre dépend de son prédécesseur: la nature quantitative et la propriété d'être fini ou infini se retrouvent intrinsèquement dans chacun selon un mode de dérivation allant de l'antérieur au postérieur[1]. Dans ces conditions, Aristote est donc pleinement justifié de baser sa doctrine commune et fondamentale sur la seule étude de la grandeur, laquelle du reste est plus aisément connaissable que le mouvement ou le temps.

Ainsi donc, puisqu'il n'est pas possible de rejeter totalement l'existence de l'infini et puisque, d'autre part, il n'est pas possible de l'admettre purement et simplement, Aristote se verra pour ainsi dire contraint -et nous avec lui- de conclure qu'en un sens l'infini existe et qu'en un autre sens il n'existe pas; que, d'une façon, il existe et que, d'une autre façon, il n'existe pas. Et, par là même, il est tout naturellement amené à dire de quelle façon l'infini existe. Cette tâche

[1] Cf. S. Thomas, In V Metaph., lect. 51; In VI Phys., passim.

le retient assez longuement, car il ne se contente pas de déterminer comment l'infini en général existe, mais, sans doute autant pour illustrer concrètement son exposé que pour le rendre plus complet, il entreprend immédiatement une étude comparative des différentes réalisations de l'infini, montrant ce qu'elles ont en commun et dégageant les caractéristiques propres à chacune.

L'infini existe, mais d'une façon débile, déficiente; son mode d'existence n'est pas parfait. Il existe pour autant qu'il est en puissance, à la manière d'un être en puissance s'acheminant vers un mode d'existence achevé, complet. L'enfant, par rapport à l'homme d'âge mûr, est comme la puissance à l'acte. Le tas de pierres, de briques, de bois et de mortier n'est pas une maison, absolument parlant, mais il y a en lui une maison en puissance. L'infini est une entité de ce genre; ce n'est pas un être en acte, mais un être en puissance.

Il n'est cependant pas suffisant de dire que l'infini est en puissance pour caractériser pleinement son mode d'existence. Car il y a deux façons d'être en puissance. Une entité peut être en puissance par rapport à un certain acte d'une façon telle qu'à un moment donné il n'y a que de la puissance et que, le moment d'après, il n'y a plus que de l'acte. Après un devenir, après une transformation, toute la puissance a alors disparu au profit de l'acte. C'est le cas des pierres, du bois, du mortier et de la maison: lorsque pierres, bois et mortier sont épars, la maison n'est qu'en puissance; mais, une fois tous les éléments réunis, agencés, disposés, une fois la maison faite, il ne subsiste plus de puissance, mais seulement de l'acte.

Mais on peut être en puissance d'une autre façon. Le cas se présente lorsque la puissance ne disparaît jamais totalement au profit de l'acte. Il s'agit alors d'une puissance qui s'actualise graduellement, qui acquiert son actualité peu à peu sans que jamais elle ne lui soit acquise totalement. Les choses successives sont de cette sorte: leur existence réside essentiellement dans une succession, elles se réalisent dans et par une succession; leur actualité, leur acte ne leur parvient pas d'un seul coup, mais peu à peu. Une course de chevaux, d'automobiles ou de yachts existe de cette façon; elle existe pour autant qu'une des étapes est en cours. Pareillement, la journée existe de la même manière: le jour existe pour autant qu'existe un des instants successifs que l'on peut désigner en lui. Les entités qui sont en puissance de cette façon apparaissent donc comme n'étant rien d'autre, essentiellement, qu'un mélange de puissance et d'acte, acte par rapport à ce qui a déjà été acquis et demeure toujours fini, puissance par rapport à ce qui reste à acquérir et à acquérir indéfiniment s'il s'agit de l'infini.

Il importe de noter comment procède, ici, Aristote. Il a observé qu'on dit de certaines choses qu'elles existent en acte, de certaines autres qu'elles existent en puissance. Or on parle tantôt de l'infini par apposition et tantôt de l'infini par division: on dit que l'infini existe par apposition dans les nombres et qu'il existe par division, ablation ou prélèvement dans les grandeurs. Aristote rapproche donc et identifie l'un à l'autre l'infini par apposition ou division, d'une part, et, d'autre part, l'être en puissance qui, par surcroît, est en puissance toujours incomplète[1].

A la suite de ces précisions touchant le mode d'existence en puissance de l'infini, Aristote institue sa comparaison entre les différents cas d'infini, authentiques ou non, tels qu'ils sont généralement reconnus: infini du temps et de la génération, infini du nombre et des grandeurs. Tous les cas d'infini ont un même trait en commun: il est en effet de la nature même de l'infini de résider essentiellement dans l'apparition ou acquisition successive et ininterrompue de ses parties, l'une après l'autre, de telle sorte que ce qui a déjà été

---

[1] Thomas Moreux, dans Confins de la science et de la foi, Paris, Gaston Doin, 1925, t.1, p.92, cite un texte tiré des Dernières Pensées de Henri Poincaré. Ce passage est malheureusement introuvable dans la nouvelle édition de l'ouvrage de Poincaré. Nous le rapportons quand même, car il est tout à fait dans la ligne de pensée de Poincaré. "Quand je parle de tous les nombres entiers, je veux dire tous les nombres entiers qu'on a inventés et tous ceux qu'on pourra inventer un jour; quand je parle de tous les points de l'espace, je veux dire tous les points dont les coordonnées sont exprimables par des nombres rationnels, ou par des nombres algébriques, ou par des intégrales, ou de tout autre manière que l'on pourra inventer. Et c'est ce que l'on pourra qui est l'infini".

acquis et actualisé est toujours quelque chose de fini. On ne peut considérer l'infini comme une entité qui serait donnée tout entière en même temps, comme quelque chose dont on pourrait en quelque sorte faire le tour, qu'on pourrait saisir d'un seul regard et qu'on pourrait désigner comme on peut le faire pour un homme ou une maison. On peut dire de la maison qu'elle est là, donnée, mais on n'en peut dire autant de l'infini quel qu'il soit: il ressemble aux choses successives qui existent dans une succession, comme c'est le cas d'une course ou du jour dont l'entité se fait sans cesse bien qu'elle ne soit jamais tout entière donnée en même temps.

Tous ces êtres en puissance dont la réalisation s'effectue progressivement sans qu'aucun terme à cette succession ne se laisse entrevoir et qui, pour cette raison, apparaissent comme infinis, ne sont pas en tous points semblables. L'infini du temps et de la génération diffère de l'infini de la grandeur. Dans le temps, l'acquis constant et successif est fugace: il s'évanouit au fur et à mesure qu'il apparaît. Dans le monde de la génération des vivants, des hommes en particulier, l'acquis successif est passager: il dure un certain temps pour disparaître finalement lui aussi de sorte que, à un instant quelconque, la multitude des hommes vivants constitue un ensemble fini et limité. En revanche, dans le monde de la quantité, les parties nouvellement acquises par un processus itératif perdurent et demeurent parce que la quantité, comme telle, n'est pas engagée dans le mouvement sensible.

Mais là n'est pas ce qui importe vraiment pour Aristote. C'est à l'étude de l'infini par division et par apposition dans la grandeur et le nombre qu'il accorde toute son attention. Le processus de division et le processus d'addition s'appliquent tous deux à la grandeur et au nombre; mais lorsqu'on envisage la possibilité de les poursuivre à l'infini, des différences surgissent selon qu'il s'agit de la grandeur ou qu'il s'agit du nombre. C'est d'abord exclusivement en regard de la grandeur qu'Aristote en traitera; ce n'est que plus loin, lorsqu'il aura donné la définition de l'infini, qu'il en fera l'étude par rapport au nombre. Deux raisons à cet ordre, l'une tout à fait générale, l'autre particulière au traité en cause. La raison générale tient au fait que notre connaissance du nombre dépend de celle de la grandeur; la raison spéciale tient au sujet propre de l'investigation en cours, laquelle se situe uniquement sur le plan de la grandeur et non pas sur celui du nombre.

L'infini par division et l'infini par apposition sont très proches l'un de l'autre, ils sont unis par une parenté très étroite. Pourtant ils ne sont pas identiques. Comme l'un est l'inverse de l'autre, ils ne peuvent se confondre l'un avec l'autre: l'infini par apposition, en effet, dépend totalement de l'infini par division et c'est dans cette dépendance même du processus d'apposition vis-à-vis du processus de division que réside le lien étroit entre ces deux types d'infini. Cette dépendance du processus d'apposition par rapport à l'autre impose du reste au premier des restrictions à ne pas ignorer si l'on ne veut pas tomber dans une grande confusion au sujet de la doctrine d'Aristote.

Puisque l'infini par division est premier, c'est lui qu'il faut expliquer d'abord. Il faut voir dans quelles conditions il se réalise et aussi quels sont les obstacles à sa réalisation. Au départ, il est à la fois nécessaire et suffisant de supposer une grandeur finie quelconque; pour fixer davantage les idées, on peut songer sans le moindre inconvénient à une droite finie. Effectuons une division sur cette droite et choisissons l'une des portions ainsi déterminées. Entre les dimensions de cette portion de droite et la doite entière, il existe une proportion déterminée. Gardant fixe ce rapport, nous pouvons procéder à de nouvelles divisions sur les portions nouvelles obtenues à chaque étape de la division. Or, dans de telles conditions, le processus n'a pas de fin. Jamais il ne pourra se parfaire, s'achever, parvenir à un terme; la division sera toujours possible, car il restera toujours une portion de ligne à diviser, portion qui, manifestement, diminue en longueur à chaque étape, mais sans jamais aboutir à des points. Et c'est en quoi réside l'infini par division.

Rien de plus facile et, en même temps, de plus illuminateur que de traduire cette situation dans le langage moderne de l'analyse mathématique. Supposons que la droite envisagée ait l'unité pour mesure de sa longueur. Divisons-la en deux parties égales: chacune détermine la même proportion vis-à-vis de la ligne totale, soit $1/2$. Prélevons l'une des parties et éliminons l'autre. Sur la portion prélevée, effectuons de nouvelles divisions selon le rapport $1/2$ et des prélèvements correspondants. La poursuite de ce processus de divisions et de prélèvements à l'aide de ce rapport fixe, engendre une suite illimitée qui, exprimée analytiquement, apparaît ainsi:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{2^3}, \quad \ldots \quad \frac{1}{2^n}, \quad \ldots$$

Le terme général de cette suite représente la longueur de la partie prélevée après la Nième division. La suite elle-même est illimitée: impossible de lui assigner un dernier terme. Il est clair que la valeur de chaque membre diminue progressivement et s'approche de plus en plus de zéro, mais, et ceci est d'une importance capitale, sans jamais l'atteindre. Le mathématicien moderne dirait de cette suite qu'elle tend ou converge vers zéro, et de zéro, qu'il est la limite de cette suite. En langage géométrique, cela signifie qu'après la Nième division, la portion de droite obtenue possède encore une longueur, si minime soit-elle. Cela veut encore dire que le processus de division n'engendrera jamais un point, i.e., une entité de dimensions nulles.

Le processus décrit plus haut nous a permis de constater deux choses: d'abord, que la longueur de la portion de droite, obtenue et prélevée après chaque division, va sans cesse en diminuant, ensuite que le processus de division est illimité. Or ce n'est pas par accident qu'il en est ainsi; on en trouve la cause dans l'utilisation d'un rapport fixe: la moitié de la demie est évidemment inférieure à la moitié du tout.

Mais si, au lieu de garder la proportion fixe et d'effectuer des prélèvements décroissants, on prélevait des longueurs constantes, le rapport devrait alors croître et le processus se terminerait après un certain nombre d'étapes. Prenons, par exemple, une droite de 100 pieds et partageons-la en deux parties: l'une d'un pied, l'autre de 99 pieds. Retenons la première; comparée à la droite entière, elle fournit le rapport 1/100. Prélevons la partie mesurant un pied; il restera alors une longueur de 99 pieds. De ce reste, soustrayons à nouveau une portion d'un pied. Le rapport entre cette portion d'un pied et le premier reste diffère du rapport initial; celui-ci a été modifié et cela, dans le sens d'une augmentation: le rapport initial était de 1/100, le second est de 1/99. Or

$$\frac{1}{100} < \frac{1}{99}$$

puisque

$$99 < 100.$$

Il y a donc influence réciproque et lien nécessaire entre le rapport suivant lequel se font les divisions et la valeur de la portion obtenue à chaque étape du processus: si la proportion est fixe, la longueur prélevée diminue; mais le prélèvement est-il d'une longueur fixe, la proportion croît. Ces variations déterminent également le caractère limité ou illimité du processus. Si la proportion est constante, le processus de division est infini; si, au contraire, on prélève une longueur constante, la droite initiale sera éventuellement épuisée et le processus atteindra nécessairement un terme, une fin. En effet, si, d'une droite de 100 pieds, on soustrait successivement un pied, il suffira de répéter cent fois ce prélèvement pour annihiler la droite.

Par suite de cette analyse, il devient manifeste que l'infini par division ou prélèvement n'existe pas autrement qu'en puissance dans la division de la grandeur. Il réside dans une potentialité. Cette potentialité, sans doute, s'accompagne toujours d'actualité, mais l'infini ne se prend pas par rapport à cette actualité, i.e., par rapport aux divisions déjà effectuées, mais par rapport à celles qu'il reste toujours possible d'effectuer. On pourrait encore dire que l'infini ne réside pas dans le résultat déjà obtenu des divisions, mais dans le processus interminable qui les engendre. Etant toujours en puissance, l'infini s'apparente à la matière première. Celle-ci en effet, même si elle est toujours nécessairement revêtue d'une forme et actualisée par elle, demeure toujours en puissance par rapport à une infinité d'autres formes sensibles qu'elle peut recevoir successivement.

A cause de sa dépendance étroite du processus de division, point n'est besoin de faire une analyse détaillée du processus d'apposition à l'infini. Si, dans l'un, le processus réside dans une division et un prélèvement, dans l'autre, il réside dans une addition, une apposition de parties ou éléments obtenus grâce au processus indéfini de division. L'infini par apposition est, lui aussi, un infini en puissance qui s'accompagne d'acte; l'infini ne se trouve pas, ici, dans ce qui a déjà été apposé ou ajouté, mais dans la possibilité, jamais épuisée, de toujours ajouter au déjà acquis.

Malgré leur grande affinité, les deux processus décrits plus haut, et tels que décrits, ont quand même des propriétés fort différentes. Dans la grandeur, le processus de division à l'infini permet toujours de dépasser en petitesse toute longueur déterminée que l'on aurait choisie à l'avance, si minime soit-elle; par contre, le processus d'apposition à l'infini ne permet pas de dépasser, dans le sens de l'augmentation, toute valeur ou longueur finie et déterminée. En d'autres termes, il existe un maximum à la croissance de l'infini par apposition, mais aucun minimum à la décroissance de l'infini par division. Une remarque s'impose à propos du processus d'apposition: si en effet l'on peut toujours assigner une valeur qu'il ne pourra ni dépasser ni même atteindre, il n'est pas dit qu'il ne pourra pas dépasser n'importe quelle longueur. Il s'en trouve effectivement qu'on pourra dépasser, mais l'on ne pourra dépasser ni même atteindre toutes celles qu'on pourrait désigner. La suite éclairera davantage ce point.

Le langage analytique des mathématiques permet de traduire et illustrer cette double situation de façon claire, saisissante et élégante. Montrons d'abord que le processus de division de la grandeur ne connait pas de minimum. Soit une droite de longueur unité. Divisée selon la proportion fixe $1/2$, elle engendre la suite déjà mentionnée:

$$1/2, \quad 1/2^2, \quad 1/2^3, \quad 1/2^4, \ldots, \quad 1/2^n, \quad \ldots$$

Existe-t-il une valeur minimale que le processus ne permettrait pas de franchir? La valeur $1/16,777,216$ serait-elle, par exemple, un minimum infranchissable? Des considérations fort élémentaires nous forcent à reconnaître qu'une telle valeur, si petite soit-elle, ne constitue aucunement une limite à la décroissance, un minimum infranchissable. Le processus de division, si on le poursuit assez longtemps, fournira une longueur dont la valeur sera inférieure à la limite proposée. En effet, cette soit-disant limite sera dépassée en petitesse dès que l'on aura

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{16,777,216} = \frac{1}{2^{24}},$$

i.e., lorsque

$$2^n > 16,777,216 = (256)^3 = (2^8)^3 = 2^{24}.$$

Par conséquent, dès que $n > 24$, la valeur assignée comme limite minimale sera franchie.

La situation est tout autre lorsqu'il s'agit du processus d'apposition: l'accroissement progressif qu'il inclut converge vers un maximum, vers une limite qu'il n'atteint pas. Illustrons cette situation nouvelle, et, comme plus haut, exprimons-en les conditions en termes analytiques. Toutefois présentons d'abord, sommairement, la situation géométrique à partir de l'exemple utilisé par S. Thomas dans son commentaire sur le le présent passage d'Aristote.

Supposons donnés trois segments de droite: chacun des deux premiers a 10 pour mesure, le troisième mesure 20 et représente la valeur limite vers laquelle converge le processus.

(A) ________ 10 ________

(B) ________ 10 ________

(C) ________________ 20 ________________

Au segment (B) de longueur 10, ajoutons successivement les moitiés de valeur décroissante obtenues par division du segment (A) selon le rapport constant 1/2. Le résultat d'un tel processus d'apposition se représente analytiquement par la série suivante:

$$10 + \frac{10}{2} + \frac{10}{2^2} + \ldots + \frac{10}{2^n} + \ldots$$

Reste à voir si cette série est convergente, i.e., si elle tend vers une valeur finie et déterminée. Une fois la convergence établie, il faudra ensuite calculer, si possible, la valeur limite vers laquelle tend la série. Fort heureusement, nous pouvons aisément répondre à ces deux questions dans le cas de la série que nous examinons: elle appartient à toute une classe de séries dont on peut déterminer la convergence et dont on peut évaluer la limite lorsque la convergence existe. Cette classe de séries a la forme suivante:

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots + ax^n + \ldots$$

Pareille série converge pourvu que la valeur absolue de la variable x soit inférieure à l'unité: $|x| < 1$. Et la limite vers laquelle elle tend, la valeur vers laquelle elle s'approche, sans jamais l'atteindre, lorsqu'on ajoute indéfiniment des termes est la suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

La série que nous avons à examiner n'est qu'un cas particulier du type général où l'on remplace a par 10 et x par 1/2. Comme $1/2 < 1$, la condition de convergence $|x| < 1$ est vérifiée. Il suffit donc de calculer la somme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 10.(1/2^n) = \frac{10}{1 - 1/2} = \frac{2 \,.\, 10}{1} = 20.$$

Telle est la limite vers laquelle converge la série représentative des données du processus géométrique d'apposition. Cette limite constitue le maximum que ne saurait dépasser le processus d'apposition à l'infini dans le domaine de la grandeur. Notons en passant que ce langage analytique que nous venons d'utiliser supplée à l'imperfection de l'intuition géométrique. Au delà d'un certain degré de petitesse, l'intuition géométrique visuelle perd toute vertu persuasive. Mais le langage analytique n'a pas ce défaut, il peut emporter l'assentiment de l'intelligence là où l'intuition visuelle ne vaut plus.

Des considérations qu'il vient de faire sur le comportement des processus de division et d'apposition à l'infini, Aristote tire une conclusion d'ordre naturel que voici:

> De sorte que tout surpasser (i.e., excéder toute grandeur ou valeur finie et déterminée) n'est pas possible même en puissance s'il est

> vrai que l'infini, accident de sa nature, n'existe pas en acte contrairement à l'opinion des physiologues qui prétendaient que le corps formant la partie extérieure de l'univers était infini quelle que fût sa substance, air ou tout autre élément[1]. Mais si un tel corps sensible ne peut exister en acte, il est clair qu'il ne peut même pas être en puissance par le processus d'apposition, à moins qu'il ne s'agisse, comme on l'a dit, du processus opposé à la division.

Ce passage, cette conclusion d'Aristote est étonnante, du moins de prime abord. On a même tendance à la récuser. Et l'étonnement provoqué par ce passage naît de deux sources: de la conclusion elle-même et de la raison qui la motive. Il est d'abord étonnant de lire que le processus d'apposition dans la grandeur ne permet pas de dépasser toute grandeur déterminée et assignée à l'avance. Pareille conclusion semble aller directement contre cette capacité native, nullement fictive, que possède notre intelligence de toujours pouvoir concevoir une grandeur plus grande et de toujours pouvoir ajouter à une grandeur donnée et proposée[2].

La seconde source d'étonnement tient à ceci: il n'existe pas et ne peut pas exister de corps sensible infini en acte; par conséquent, conclut Aristote, le processus d'apposition à l'infini dans les grandeurs connaît un maximum à la croissance. Ce

---

[1] Cette traduction est nôtre. Elle est moins littérale que celle de Tricot; elle est croyons-nous, plus facile à comprendre parce que plus explicite.

[2] A ce propos, rappelons quelques bribes du commentaire de S. Thomas, relatifs à la cinquième raison qui amena les Anciens à poser l'infini: "...intellectus numquam deficit quin super quodlibet finitum datum possit aliquid addere". Et, plus loin, au même endroit: "Et eadem ratione videntur magnitudines mathematicae, quae in imaginatione consistunt, esse infinitae: quia qualibet magnitudine data possumus imaginari majorem" (In III Phys., lect.7).

qui surprend ici c'est qu'Aristote avance une raison naturelle pour dégager une condition limitatrice d'un processus proprement mathématique. Or nous savons que ce qui est mathématiquement impossible est naturellement impossible également; en revanche, ce qui est mathématiquement possible peut n'être pas possible naturellement.

Essayons de voir clair en tout cela. Pour ce faire, il faut sortir un peu du cadre restreint où se situe le présent problème et faire appel à des considérations plus générales.

Il faut d'abord noter que le processus d'apposition à l'infini, tout comme celui de la division à l'infini, se situe sur le plan de la grandeur mathématique et non sur celui de la grandeur naturelle, sauf pour ce qui est du temps. Aristote soutient, à bon droit, que le processus de division peut se poursuivre à l'infini dans la grandeur, moyennant certaines conditions; s'il devait s'arrêter, cela voudrait dire qu'il existe une grandeur infime, indivisible, ce qui détruit tout à fait la notion même de grandeur, voire celle de quantité. Mais il nie la possibilité de diviser à l'infini la grandeur naturelle. Cette impossibilité n'est pas due à la quantité comme telle, mais à la forme substantielle qui pose, dans le corps naturel, certaines limites quantitatives, en plus ou en moins, au delà desquelles le composé naturel ne peut plus subsister[1].

---

[1] Phys., I, c.4, 187 b 20. S. Thomas, commentant ce passage, écrira: "Sed dicendum, quod licet corpus mathematice acceptum sit divisibile in infinitum, corpus tamen naturale non est divisibile in infinitum. In corpore enim mathematico non consideratur nisi quantitas, in qua nihil invenitur divisioni repugnans; sed in corpore naturali invenitur forma naturalis, quae requirit determinatam quantitatem sicut et alia accidentia". (In I Phys., lect. 9).

Il est vrai de prétendre que le processus de division à l'infini peut, dans la grandeur, dépasser n'importe quel minimum assignable d'avance ou, si l'on préfère, il est vrai de dire qu'il n'y a pas de minimum. Mais cela vaut uniquement sur le plan de la grandeur pure, non pour la grandeur naturelle. Et, par là même, on est naturellement amené à poser la question: pourquoi donc, au niveau de la quantité pure, le processus d'apposition à l'infini connaît-il une limite, un maximum? On comprend aisément que, pour la grandeur naturelle et sensible, le processus d'apposition à l'infini ne permette pas de dépasser toute limite assignée d'avance et que le processus inverse de division doive rencontrer une limite inférieure. Pourquoi donc les situations ne sont-elles pas analogues?

La solution de cette difficulté requiert une distinction préalable. La quantité réelle peut revêtir deux états: l'état sensible suivant lequel on la trouve réalisée dans la nature, et l'état pur ou abstrait qui lui convient par suite de l'opération abstractive de l'intelligence. Par rapport et en opposition à la grandeur réelle, on peut parler d'une quantité irréelle ou purement imaginaire qui serait une pure création de notre intelligence. La quantité à l'état pur, malgré sa condition abstractive, n'est pas une quantité imaginaire; elle est réelle pour autant qu'elle est tirée, abstraite de la quantité sensible et naturelle.

Revenons à la conclusion d'Aristote en l'envisageant à la lumière de la distinction posée. Pour qu'il puisse être efficace et engendrer un corps sensible infini, le processus d'apposition à l'infini dans la grandeur devrait s'exercer sur la quantité réelle à l'état naturel. Comme il ne fonctionne pas à vide, mais présuppose une telle quantité, il faudrait que lui fût donnée au départ un corps sensible de dimensions infinies. Or, puisqu'il n'existe pas de corps sensible infini en dimensions sur lequel pourrait s'exercer le processus de division, le processus d'apposition à l'infini qui se greffe sur le processus de division ne saurait produire un corps infini; il doit nécessairement demeurer en deça d'un maximum.

Sur le plan de la quantité pure, les deux processus de division et d'apposition sont possibles. Mais la quantité pure dont il s'agit ici n'est pas une quantité purement imaginaire; c'est une quantité abstraite de la réalité sensible. De ce fait, sa réalité et ses proportions ou dimensions dépendent uniquement de la réalité extérieure, aucunement de l'intelligence. Tout ce qu'elle doit à celle-ci, c'est son état d'abstraction, nullement sa réalité même. Or la quantité abstraite présuppose la quantité réelle non-abstraite. Comme cette dernière existe en proportion finies, il en sera de même de l'autre. Et voilà pourquoi le processus d'apposition à l'infini ne peut dépasser toute grandeur assignable d'avance: il faudrait pour cela qu'il existât un corps sensible infini en acte, ce qui a été nié. On ne doit pas s'étonner de la disparité entre le processus à l'infini selon la division et celui selon l'apposition dans les grandeurs. L'apposition est limitée par un maximum parce qu'il n'existe pas de corps infini, de grandeur infinie. Par contre, le processus de division peut se poursuivre indéfiniment sans rencontrer de minimum positif à la décroissance parce qu'il ne présuppose pas l'existence d'une grandeur de dimensions infinies; il suffit que soit donnée une grandeur finie.

Enfin, si on considère une grandeur purement imaginaire qui serait fondée, non pas sur la réalité extérieure, mais sur la seule puissance formatrice de l'intelligence, alors rien n'empêche que le processus infini d'apposition puisse dépasser toute limite fixée à l'avance. Mais il est alors évident que rien, dans la réalité extra-mentale, ne correspond à ce qui se passe à l'intérieur de l'intelligence. Cela ne pose ni ne présuppose aucun corps sensible infini en acte.

Dans les nombres, les processus de division et d'apposition offrent des traits différents de ceux que nous avons reconnus dans le domaine de la grandeur. Aristote renvoie cette analyse après celle qu'il consacre à la nature de l'infini, mais aucun empêchement sérieux nous interdit de faire cette étude dès maintenant. Tout d'abord notons soigneusement que le terme <u>nombre</u> avait, jadis, une signification et un usage très limités. Le terme englobe aujourd'hui une multitude de classes d'entités mathématiques différentes: nombres naturels, nombres entiers, rationnels, irrationnels, réels, complexes, hypercomplexes... Sous la plume d'Aristote, le terme <u>nombre</u> désignait ce que nous entendons aujourd'hui par <u>nombre naturel</u>, l'unité en moins, car, pour Aristote, l'unité n'était pas un nombre, mais le principe des nombres[1]. De plus, pour Aristote, le nombre, espèce de quantité et sujet de l'arithmétique, est étroitement lié à la quantité continue. Il faut à tout prix envisager la question du nombre dans cette perspective si l'on veut comprendre la position d'Aristote sur ce point. C'est la division de la grandeur ou quantité continue qui engendre le nombre. Et si l'on veut connaître toutes les propriétés qu'Aristote reconnait au nombre, l'on ne peut pas séparer le nombre de la division du continu[2].

La division de la grandeur cause et engendre le nombre, multitude d'unités mesurée par l'un. Plus on divise la grandeur, plus s'accroît la multitude des parties engendrées dont on néglige les dimensions. Comme cette divisibilité de la grandeur ne s'arrête pas, malgré la diminution en longueur des parties obtenues à chaque étape de la division, la multitude des parties ainsi engendrées n'a pas de limite. Donc, si, dans la grandeur, le processus d'apposition rencontre une limite, un maximum, dans le cas du nombre, en revanche, il n'existe aucune limite à la croissance: la suite des nombres peut toujours être

---

[1] Cf. Gottlob Frege, The Foundations of Arithmetic, trad. anglaise de J.L. Austin, 2e éd. rev., Oxford, Blackwell, 1953. Frege distingue un sens strict et un sens large du terme nombre. Le sens strict correspond aux nombres naturels, l'unité comprise; le sens large n'est rien d'autre que le sens moderne. Le fait d'inclure l'unité parmi les nombres cause beaucoup de mal à Frege lorsqu'il veut définir ce qu'est le nombre au sens strict.

[2] Cf. S. Thomas, In III Phys., lect. 11.

allongée, il n'existe pas de nombre maximum, de dernier nombre. Mais, dans la division du nombre, la situation est renversée. Le processus de division ne peut, sur ce plan, se poursuivre indéfiniment si grand que soit le nombre proposé à la division. La suite des nombres naturels est certes indéfinie et illimitée, mais chaque nombre de cette suite, si grand soit-il, est toujours une multitude finie d'unités. Par conséquent, quelle que soit la façon dont on divise un nombre proposé et quelque élevée que soit la multitude d'unités qu'il renferme, le processus de division aboutira éventuellement, après des étapes plus ou moins nombreuses, à des unités. Or rien n'est un qui ne soit indivisible. Ainsi donc, contrairement au processus de division appliqué aux grandeurs où il est illimité et ne connaît aucun minimum, le même processus, appliqué aux nombres, est limité et aboutit à un minimum, à savoir l'unité qui est indivisible.