TROISIEME PARTIE

L'INFINI EN MATHEMATIQUES

CHAPITRE I

IMPORTANCE DE L'INFINI EN MATHEMATIQUES

L'infini est inévitable en mathématiques. Vouloir l'en bannir serait une entreprise vaine et d'avance vouée à l'échec; car si elle devait réussir elle équivaudrait à la suppression des mathématiques elles-mêmes. Dans le gigantesque édifice que constituent les mathématiques contemporaines, la présence de l'infini n'est pas confinée à un secteur ou à l'autre, mais elle est partout répandue, à tel point qu'Hermann Weyl a pu faire cette déclaration déjà citée: "Mathematics is the science of the infinite"[1]. Vraisemblablement il n'entendait pas, par là, définir les mathématiques, mais voulait plutôt souligner l'importance capitale du rôle qu'y joue l'infini. Une grave erreur à éviter, c'est celle de croire l'infini présent dans les seules mathématiques supérieures ou avancées; car, en fait, même si sa présence y est plus discrète et effacée, c'est aux portes mêmes des mathématiques que l'infini est présent. Une autre erreur possible serait de croire que l'apparition de

---

[1] The Open World, New Haven, Yale Univ. Press. 1932.

l'infini en mathématiques est de date récente. Si l'on doit reconnaître qu'il joue aujourd'hui un rôle illimité et prépondérant dans les mathématiques contemporaines, rôle qui n'a cessé de grandir au cours des siècles, il n'empêche que sa présence est déjà assez fortement accusée dans les mathématiques grecques pour y être aisément perceptible[1].

Nous poursuivrons, dans ce chapitre, un double but: montrer tout d'abord, de façon aussi brève et simple que possible, mais quand même probante, quelle place immense tient l'infini dans les mathématiques tant anciennes que contemporaines; en second lieu, faire voir le rôle grandissant que l'infini a été appelé à y jouer à mesure que celles-ci se développaient au cours des siècles, sans toutefois nous astreindre aux exigences d'une présentation à caractère proprement historique.

Nous envisagerons d'abord l'infini au niveau des mathématiques élémentaires, i.e., là où il n'est pas fait un usage systématique de la notion de limite ni des processus infinis. Ces considérations vaudront et pour les mathématiques anciennes et pour les mathématiques contemporaines. Ensuite, nous verrons le rôle qui a été dévolu à l'infini à partir de l'invention du calcul infinitésimal et, finalement, ce qu'est

---

1 Carl Friedrich von Weizsacker, Le monde vu par la physique, trad. de l'allemand par F. Mosser, Paris, Flammarion, (c. 1956), p.183. L'auteur a assurément de bonnes raisons pour écrire que la géométrie d'Euclide est une géométrie du fini. Mais il ne prétend pas par là que l'infini soit totalement absent des Eléments: il faudrait autrement supprimer ou ignorer toute la doctrine des parallèles et le livre X qui traite des incommensurables et où les processus infinis entrent en ligne de compte.

devenu l'infini avec l'arithmétique transfinie de Georg Cantor.

Rien ne paraît plus naturel que de demander quelle est la raison, s'il en existe une, de la présence et de l'importance de l'infini en mathématiques. Pour tous ceux qui reconnaissent, dans la quantité, le sujet propre, total ou au moins partiel, des mathématiques, la réponse est facile. Rien d'étonnant, pour eux, que l'étude systématique de la quantité conduise naturellement et inéluctablement à la considération de ces propriétés mutuellement exclusives que sont le fini et l'infini[1]. On sait toutefois que cette vue relative au sujet des mathématiques n'est pas celle de nombreux mathématiciens contemporains; il serait probablement plus juste de dire que ce n'est pas l'opinion de la plupart d'entre eux. Pour tous les disciples de Russell et de Hilbert en tout cas, la quantité n'a rien à voir avec les mathématiques, ou, plus justement peut-être, n'a pas plus de titre à l'attention du mathématicien que n'importe quoi d'autre. Dans de telles conditions, comment expliquent-ils la place si large et l'attention si grande accordées à l'infini en mathématiques? La réponse est toute simple: ils n'en fournissent aucune explication.

Mais qu'importe la cause de cet état de choses, ce qui, pour nous, est indispensable, c'est de rendre manifeste, d'une

---

[1] S. Thomas, In I De Coelo, lect. 6, n.62: "Infinitum autem, secundum Philosophum in I Physic., pertinet ad quantitatem; ita quod id quod quantitate caret, neque finitum neque infinitum est".

manière simple mais efficace, cette présence partout répandue de l'infini en mathématique. A cette fin, occupons-nous d'abord du domaine des nombres.

La signification du terme 'nombre' s'est fort élargie au cours des siècles. Pour Aristote -comme pour Euclide du reste- ce terme désignait une multitude finie d'unités, une multitude mesurée par l'unité[1]. Plus concrètement, on entendait par 'nombres' ce qu'on entend aujourd'hui par 'nombres naturels' moins l'unité, i.e., la suite bien connue

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots n, \ldots$$

Mais, graduellement, le mot a été amené à désigner une multitude d'entités mathématiques si vaste et si variée qu'il a perdu la précision due à sa limitation d'autrefois. Si bien qu'on se voit, aujourd'hui, pour ainsi dire forcé de partager cet immense domaine en catégories plus restreintes et auxquelles correspondent des dénominations distinctives appropriées. Pour signifier l'unité et les nombres au sens ancien, on utilisera l'expression de 'nombres naturels' ou d'entiers positifs. Par nombres 'entiers', on entend l'ensemble des nombres entiers positifs, nul et négatifs; la classe des 'nombres rationnels' ou 'nombres fractionnaires' comprend tous les rapports ou quotients de deux

[1] Cf. Gottlob Frege, The Foundations of Arithmetic, 2e éd., trad. J.L. Austin, N.Y., Harper Torchbooks, 1960, p.25. Frege distingue un sens strict et restreint de même qu'un sens large du terme 'nombre'. Le sens strict est restreint aux 'nombres naturels' qui, pour lui, incluent l'unité.

nombres entiers, toutes les expressions de la forme m/n où n, le dénominateur, n'est pas nul. A cela s'ajoutent les 'nombres irrationnels' -les quantités irrationnelles d'autrefois- qui englobent tous les rapports quantitatifs qui ne peuvent s'exprimer sous la forme de deux nombres entiers. Réunis aux nombres rationnels, ces derniers composent l'ensemble des 'nombres réels'. Un autre ensemble, dont la création a provoqué de turbulents remous et de virulentes controverses parmi les mathématiciens, c'est celui des 'nombres complexes'. Ces nombres doivent leur appellation au fait que leur représentation donne naissance à une expression composée de deux parties:

$$a + bi.$$

La première partie 'a' s'appelle partie réelle; l'autre, 'b', coefficient de 'i', s'appelle partie imaginaire. Dans cette expression ou formule, 'a' et 'b' représentent des nombres réels, 'i' symbolise $\sqrt{-1}$. Ces nombres complexes sont les premiers et les plus simples de toute une suite: quaternions, biquaternions, sedénions dont l'expression symbolique respective comprend quatre, huit et seize termes. Ce sont là autant de catégories de 'nombres hypercomplexes'. Il nous suffira cependant de ne retenir ici que les premiers ensembles, y compris celui des nombres réels; quant aux autres, s'il était nécessaire de les mentionner pour établir la signification très élargie du terme 'nombre', leur étude, en regard de l'infini, n'apporte rien que nous n'ayons déjà de par l'analyse des ensembles antérieurs.

Parmi tous ces ensembles, celui des nombres naturels est le plus familier, le plus élémentaire, le plus fondamental de tous. Il est à la base de tous les autres, il est leur fondement; tous s'y réduisent et s'y ramènent, tous se définissent, de proche en proche, à partir et en fonction de cet ensemble initial. Comme l'édifice mathématique tout entier repose sur les ensembles numériques mentionnés et que, d'autre part, tous les ensembles numériques dépendent des nombres naturels, on peut dire que l'univers mathématique tout entier se résorbe, en dernière instance, dans cet ensemble initial. On pourrait croire que l'infini n'a rien à voir avec un ensemble si simple et si primitif. Il n'en est pourtant rien. Les nombres naturels forment un ensemble ordonné[1] selon des valeurs croissantes à partir d'un premier terme, l'unité. Autrement dit, ils forment une suite croissante. Toutefois cette suite n'est pas dense: entre deux nombres naturels quelconque, il peut exister ou non des intermédiaires; s'il n'en existe pas, on a affaire à des voisins. Chaque élément de cette suite est constitué par une multitude finie d'unités. Mais si elle possède un premier terme, elle n'a pas de dernier terme: quel que soit le nombre naturel qu'on nous désigne, si grand soit-il, on peut toujours en former un plus grand en ajoutant une unité à celui qui a été

---

[1] Dans la terminologie contemporaine des mathématiques, on dirait que les nombres naturels forment un ensemble non seulement ordonné, mais encore <u>bien-ordonné</u>, parce qu'il possède un tout premier membre. Cf. G. Birkhoff et S. MacLane, <u>A Survey of Modern Algebra</u>, New York, Macmillan, 1946, p.9.

proposé, et cela sans fin. La suite des nombres naturels est illimitée, infinie dans le sens de la croissance des nombres qui la composent bien qu'aucun de ses éléments constitutifs ne soit lui-même infini. L'infini est associé à la suite des nombres naturels, non pas aux membres de cette suite. Mais il reste que l'infini est associé et présent à ce qui constitue le point de départ même des mathématiques pour autant qu'on ne peut le décrire correctement sans faire mention de l'infini.

L'ensemble des nombres entiers[1] -positifs, nul et négatifs- fait logiquement suite[2] aux nombres naturels:

$$\ldots -n, \ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots +n, \ldots$$

Ce nouvel ensemble, à la différence du premier, n'a ni commencement ni fin, ni premier ni dernier terme, il est illimité et à gauche et à droite, il est infini et dans le sens de la décroissance et dans celui de la croissance. Pour le reste, ses caractéristiques sont celles de la suite des nombres naturels. Et, pour notre propos, il n'y a rien d'autre à ajouter.

L'ensemble des nombres rationnels, successeur immédiat de celui des nombres entiers, suscite un nouvel intérêt pour la

---

[1] On les désigne aussi, parfois, par l'expression de 'nombres qualifiés' et ce n'est pas sans raison, car ce sont plus que des nombres tout court, ils désignent plus qu'une pure valeur absolue: à leur valeur absolue s'ajoute en effet un sens ou une direction: à droite ou à gauche, au-dessus ou au-dessous d'un point de repère fixe.

[2] Historiquement les fractions sont apparues immédiatement après les nombres naturels.

question de l'infini. Si, à l'image de l'ensemble des nombres entiers, il est illimité dans les deux sens, sans commencement ni fin, il possède en revanche une caractéristique que ne possédaient pas ses prédécesseurs. Dans l'ensemble des nombres rationnels en effet il n'y a pas de voisins. Deux nombres entiers peuvent être des voisins et se succéder immédiatement: entre 5 et 6 par exemple, il n'existe aucun autre nombre naturel. Mais quels que soient les deux nombres rationnels qui soient suggérés, quelque minime que soit leur différence, on peut toujours intercaler une nouvelle fraction entre eux. Supposons données les deux fractions m/n et r/s. Supposons en outre que la première soit très rapprochée de la seconde, mais inférieure à elle: $m/n < r/s$. Rappelons d'autre part que l'ordre entre les fractions est défini par les relations suivantes:

$$\begin{array}{llll} a/b < c/d & \text{pourvu que} & a.d < b.c & \\ a/b = c/d & \ldots\ldots & a.d = b.c & \text{(I)} \\ a/b > c/d & \ldots\ldots & a.d > b.c & \end{array}$$

Il nous incombe maintenant de construire une fraction qui soit à la fois supérieure à m/n et inférieure à r/s. Pareille construction peut être réalisée de plus d'une façon[1], mais la plus simple nous conviendra. Elle consiste à additionner les

[1] Cf. Louis Couturat, De l'infini mathématique, Paris, Félix Alcan, 1896, pp. 55-58.

numérateurs des fractions proposées pour former le numérateur de la nouvelle fraction, à additionner également les dénominateurs pour obtenir le dénominateur de la fraction cherchée. On obtient ainsi la fraction:

$$m + r / \; n + s,$$

et il reste à montrer que

$$m/n \; < \; \frac{m + r}{n + s} \; < \; r/s.$$

La première inégalité est facile à vérifier. En effet, en vertu des définitions (I) précédentes et de quelques principes fondamentaux de calcul, on a

$$m.s \; < \; n.r$$

$$m.n + m.s \; < \; m.n \; + \; n.r$$

$$m.(n + s) < n.(m + r)$$

$$\frac{m}{n} \; < \; \frac{m + r}{n + s}. \qquad \text{(II)}$$

On voit par là qu'à partir de l'inégalité des fractions initiales, on peut construire rigoureusement une nouvelle fraction qui dépasse en valeur la première donnée. Il en va exactement de même pour la seconde inégalité, sauf qu'il faudra ajouter aux deux membres de l'inégalité primitive, r.s et non plus m.n comme précédemment.

$$m.s \; < \; n.r$$

$$m.s + r.s \; < \; n.r + r.s$$

$$(m+r).s \; < \; r.(n+s)$$

$$\frac{s}{r} \; < \; \frac{n + s.}{m + r} \qquad \text{(III)}$$

Réunissant (II) et (III), on obtient:

$$m/n < \frac{m + r}{n + s} < r/s.$$

La fraction construite répond donc bien à notre attente: elle est véritablement située entre les deux fractions quelconques proposées. Cela veut dire, en d'autres termes, que les deux fractions initiales ne se suivent pas, qu'elles ne sont pas voisines l'une de l'autre, car elles sont séparées par une autre fraction au moins. Qu'il en existe au moins une, c'est tout ce qu'on peut dire si l'on s'en tient strictement à la construction précédente. Mais il faut dire davantage, car s'il en existe une, il en existe en fait une infinité. Rien n'est plus aisé que de s'en rendre compte. En effet m/n et r/s sont des fractions quelconques; aucune d'elles n'est privilégiée. L'une d'elles peut être remplacée par une autre. En particulier, on peut substituer $m + r/ n + s$ à r/s et reprendre le même processus que plus haut. On obtiendra alors, au terme de cette seconde étape, le résultat suivant:

$$\frac{m}{n} < \frac{2m + r}{2n + s} < \frac{m + r}{n + s} < \frac{r}{s}.$$

La répétition, de proche en proche, de ce procédé constructif donnerait la suite:

$$\frac{m}{n} < \cdots < \frac{km + r}{kn + s} < \cdots < \frac{2m + r}{2n + s} < \frac{m + r}{n + s} < \frac{r}{s},$$

où k peut prendre toutes les valeurs naturelles possibles.

Les fractions ainsi obtenues successivement décroissent sans cesse et se rapprochent constamment de m/n. Mais ce qu'il faut bien noter, c'est que jamais ce processus constructif ne nous permettra d'atteindre m/n. Cela veut dire que non seulement il n'y a pas de fractions voisines, mais encore qu'entre deux fractions quelconques, de valeurs aussi rapprochées qu'on veut, il en existe une infinité d'autres qui les séparent. C'est là une propriété des nombres rationnels que les mathématiciens appellent 'densité'. Elle distingue nettement l'ensemble des nombres rationnels ou fractionnaires des deux ensembles précédents qui sont infiniment moins riches.

L'infini se manifeste encore d'une autre façon dans le domaine des nombres rationnels. Mais, cette fois, il s'agit beaucoup plus du symbolisme propre à les représenter que des nombres eux-mêmes ou de leur ensemble. Il existe deux modes de représentation des nombres rationnels: on les écrit soit sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers soit sous la forme décimale. Le premier mode donne toujours lieu à une expression finie: il n'y a alors toujours que deux nombres entiers en présence dans l'expression symbolique qui, par conséquent, est nécessairement finie. La situation est différente si l'on adopte[1] la représentation décimale: elle peut alors donner lieu à une expression illimitée. Pour fixer les idées,

---

[1] Il faut noter que chaque fraction est susceptible de ce double mode de représentation et, en outre, qu'il est toujours possible, dans chaque cas, de passer d'une forme de représentation à l'autre.

énumérons quelques exemples, choisis parmi les plus simples:

1/2	=	0.5
1/4	=	0.25
1/3	=	0.33333333333333...
2/3	=	0.66666666666666...
1/6	=	0.16666666666666...
1/7	=	0.142857142857142857...
1/12	=	0.08333333333333333...

Chaque fois que le dénominateur de la fraction ordinaire renferme un facteur relativement premier par rapport à la base dans laquelle les nombres sont écrits, la fraction, écrite sous forme décimale, présentera une expression infinie. Il faut toutefois remarquer que cette expression infinie offre toujours un segment récurrent, précédé d'une partie non-récurrente si le dénominateur renferme un facteur de la base. Ce mode de représentation au moyen d'expressions infinies, interminables, serait, si c'était le seul, une sérieuse source d'ennuis comme c'est le cas chaque fois que l'infini surgit; mais, heureusement, il est toujours possible, ici, de recourir à l'autre forme de représentation. Grâce à ce recours possible, l'infini ne fait naître aucun problème épineux dans l'usage des nombres rationnels.

La situation est tout autre lorsqu'on aborde l'ensemble des nombres irrationnels: leur connaissance et la détermination de leur valeur nous met aux prises avec des difficultés insurmontables; et cela, précisément parce qu'on ne peut les expliquer sans recourir à l'infini. Or l'infini est toujours une source de malaise pour l'intelligence humaine à moins qu'elle ne réussisse, de façon ingénieuse, à le ramener à du fini. L'histoire nous apprend que la découverte par les Pythagoriciens de la première irrationnelle, à savoir $\sqrt{2}$, ne fut rien de moins qu'une grande tragédie: ce fut, pour eux, la ruine de leur théorie des proportions, puisqu'elle était valable non pas pour toute grandeur, mais uniquement pour les nombres rationnels; ce fut également, à cause de cela, non seulement la ruine de toutes leurs mathématiques, mais encore de toute leur doctrine philosophique, car celle-ci était essentiellement basée sur les mathématiques[1]. Au cours des siècles, des efforts multiples et variés furent tentés pour expliquer et justifier les nombres irrationnels: d'abord dans l'antiquité, par des successeurs des Phythagoriciens comme Eudoxe et Euclide, ensuite, dans les temps modernes, par Dedekind, Cantor et autres. S'ils ont connu une large part de succès, ces louables efforts n'ont pourtant jamais réussi à dissiper tout malaise: l'esprit humain demeure en effet toujours gêné et mal à l'aise en face des quantités irrationnelles. La raison, nous allons le voir, est assez simple.

---

[1] Cf. T.L. Heath, Greek Mathematics, 2 vol., Oxford, The Clarendon Press, 1921, pp. 154-158; A Manual of Greek Mathematics, Oxford, The Clarendon Press, 1931, p.105; The Thirteen Books of Euclid's Elements, 3 vol., 2e éd., New York, Dover, 1956, t.3, Introduction, p.1.

L'intelligence humaine progresse en allant du connu à l'inconnu, du plus connu vers le moins connu; elle définit et explique à partir de données antérieures ou, au moins, mieux connues; elle prouve et démontre à partir de propositions antérieures et mieux connues. Ces principes valent, en particulier, quand il s'agit des nombres. On définit les nombres entiers en fonction des nombres naturels qui sont les tout premiers; on définit les nombres rationnels en fonction des nombres entiers. Dans ces deux cas, on peut le faire d'après un processus fini et limité. Mais il n'en va plus du tout ainsi lorsqu'il s'agit de définir les nombres irrationnels: on ne peut absolument pas y arriver sans que l'infini n'intervienne, intrinsèquement et essentiellement, dans la définition elle-même. Et cela, quelle que soit la définition qu'on propose. Dedekind, pour sa part, a proposé un type de définition basée sur des coupures introduites dans le champ des nombres rationnels[1]; mais le partage qu'effectue une coupure engendre nécessairement deux classes infinies telles que la classe inférieure ne renferme pas de maximum et la classe supérieure, pas de minimum; ces deux classes convergent toutes les deux vers une même valeur et cette valeur sera, par définition, un nombre irrationnel. Mais la valeur ainsi définie n'est jamais

---

[1] R. Dedekind, Essays on the Theory of Numbers, trad. Beman, Chicago, Open Court Publ. Co., 1924. Voir aussi: G.H. Hardy, 2e éd., A Course of Pure Mathematics, Cambridge, The University Press, 1947, pp. 28-30; Konrad Knopp, Theory and Application of Infinite Series, 2e éd., trad. R.C. Young, London, Blackie & Son, 1928, pp. 22-32.

saisie que dans un processus, dans un mouvement sans fin, jamais dans un arrêt et un repos. Quant à Cantor, c'est aux suites qu'il a eu recours pour définir les nombres irrationnels: toute suite convergente formée de nombres rationnels et dont la limite n'est pas un nombre rationnel définira un nombre irrationnel[1]. Ici encore, on voit sans peine que l'infini entre dans la définition même du nombre irrationnel, ce qui, inévitablement, constitue une source d'obscurité. On peut concevoir une troisième façon d'introduire les nombres irrationnels[2]. Nous avons vu plus haut qu'aux nombres rationnels correspondent des expressions décimales finies ou infinies; lorsqu'elles sont infinies, elles comportent toujours un segment indéfiniment récurrent. On pourrait y trouver le point de départ pour définir les nombres irrationnels: ils correspondraient aux valeurs représentées par les expressions décimales libres de tout segment sans cesse récurrent. Mais là encore, tout comme dans les définitions précédentes, on retrouve l'infini avec les mêmes inconvénients. Le recours à l'infini comme tel apparait donc comme inévitable lorsqu'il s'agit de définir les nombres irrationnels. On voit par là que l'infini affecte, sans qu'il soit possible d'échapper à cette nécessité, non plus seulement la classe des nombres irrationnels, mais chaque nombre irrationnel pris individuellement et dans sa

---

[1] O. Perron, Irrationalzahlen, 2e éd., New York, Chelsea Publ. Co., 1948, pp. 55-60.

[2] Nous pouvons encore mentionner un quatrième mode: celui des fractions continues. Mais comme il est étroitement apparenté au troisième, nous nous contentons de le signaler.

définition même, ce qui distingue ces nouveaux nombres des nombres précédents, rationnels, entiers et naturels, où chaque nombre individuel n'était pas touché.

La présence de l'infini, toujours au niveau élémentaire, apparaît non seulement dans les nombres, mais également dans la grandeur ou quantité continue et, par là, en géométrie. Par opposition aux Platoniciens, Aristote et, après lui, S. Thomas soutenaient qu'aucun continu n'est fait d'indivisibles comme de ses parties constitutives: les solides ne sont pas faits de surfaces, les surfaces de lignes, les lignes de points. Tous ces cas étant semblables, nous pouvons sans le moindre inconvénient, mutatis mutandis, ne retenir que le cas le plus simple: celui de la ligne et du point. Si le point n'est pas une partie constitutive de la ligne, il ne lui est pourtant pas étranger[1]. Il est même quelque chose de la ligne: il lui appartient à titre de terme, d'extrémité, à titre de division ou de jonction pour autant que la division d'une ligne se fait en un point et que la jonction capable d'engendrer la continuité de ses parties est réalisée grâce au point. Pour les Anciens, toute ligne -plus généralement, tout continu- est divisible à l'infini. En effet, la division d'une ligne n'engendre pas autre chose que de nouvelles lignes qui en étaient, avant la division, les parties constitutives. Or ces parties sont toutes

---

1 "Punctum igitur quamvis nulla pars sit lineae, tamen est aliquid lineae, quia est terminus lineae, et copulans partes ejus...". S. Albertus, Opera omnia, Paris, Vivès, 1890, t.1, lib. 2, De Praedicamentis, tr. 3, c.3.

de même nature entre elles puisque ce sont des lignes; elles sont, en outre, de même nature que la ligne originelle dont elles étaient, avant la division, les parties constitutives. Ce qui vaut pour la ligne primitive et la première division, vaut, dans une seconde étape, pour les lignes obtenues par une nouvelle division, lesquelles engendreront à leur tour, grâce à la division, de nouvelles lignes. Le processus peut se poursuivre sans fin, car, si l'oeil ou même l'imagination sont déroutés, l'intelligence ne peut trouver aucune raison qui puisse lui faire mettre en doute la possibilité infinie d'un pareil processus. Ce processus n'aboutira jamais à des lignes insécables ou à des points, i.e., à des indivisibles; il n'engendre et ne peut jamais engendrer que des lignes qui, de par leur nature même, sont des entités divisibles.

Si, pour Aristote et ceux qui partagent ses vues, la ligne n'est pas faite de points, il n'empêche pas toutefois qu'il soit possible de désigner, dans une ligne quelconque, autant de points qu'on veut, voire une infinité. Cela, du reste, est non seulement conforme à ce qui précède, mais en est même une conséquence. En effet, si, d'une part, une ligne quelconque est infiniment divisible et si, d'autre part, chaque division se fait en un point, il s'ensuit nécessairement qu'on peut marquer une infinité de points dans une ligne.

Les mathématiciens contemporains, même s'ils acceptent l'infinie divisibilité de la ligne, n'en conçoivent pas moins autrement sa composition. Pour eux, la ligne se compose de points comme de ses parties propres et intégrantes. Et il va de soi qu'il faudra une infinité de ces points pour former une ligne quelconque. Il ne s'agit pas pour nous de peser les mérites ou les démérites de cette position. Tout ce qui nous intéresse pour le moment, c'est de constater que, par delà les opinions divergentes sur la nature de la ligne, un fait reste acquis: l'infini surgit à propos de la grandeur qui se situe à la base même de la géométrie.

Il faut cependant dire plus. Il parait exact de soutenir que la géométrie des Grecs était bâtie sur le fini. On sait par exemple qu'Aristote, quand il définit la ligne, pense à une ligne finie: c'est pour lui une longueur finie[1] ou encore une ligne terminée par des points. Dans ses Eléments, Euclide fera de même; il posera deux notifications relatives à la droite: dans la première, il décrit la ligne comme une longueur sans largeur, ajoutant, dans la seconde, que les extrémités d'une ligne sont des points[2]. Le point de départ est radicalement différent pour le géomètre moderne; il pose, au point de départ, la ligne et la surface comme des entités illimitées, infinies[3]. Il parlera d'un segment de droite ou de ligne s'il

---

[1] Aristote, Métaph., V, c.13, 1020 a 10.

[2] Euclide, Eléments, I, déf. 2 et 3; Cf. S. Thomas, Ia, q.85, a.8, ad 2.

[3] Il faudrait peut-être préciser davantage et dire que cela vaut pour la géométrie euclidienne, non pour la géométrie projective où, par d'habiles conventions que nous signalerons plus loin, on n'a plus à parler d'infini, où on s'interdit l'usage de ce mot.

veut signifier une droite ou une ligne finie.

Mais si Euclide parait avoir voulu conférer un caractère fini à la géométrie, s'il semble avoir voulu éviter autant que possible l'infini en géométrie, on a vite fait de constater qu'il a dû très tôt renoncer à son ambition[1]. Que signifie en effet le second postulat des Eléments sinon la possibilité de prolonger sans fin une droite? Ce n'est sans doute pas là poser une droite qui serait infinie en acte, mais c'est poser une droite infinie en puissance[2]. Mais c'est surtout l'épineuse question des parallèles qui soulève le problème de l'infini d'une façon peut-être voilée, mais inévitable.

Les Eléments d'Euclide débutent par une longue suite de définitions, une série de cinq 'demandes' ou postulats et, finalement, quelques notions communes ou axiomes. La toute dernière définition est celle des parallèles et se lit comme suit:

> Les parallèles sont des droites qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

Quant au célèbre postulat d'Euclide qui devait jouer un rôle si profond et si singulier dans l'histoire de la géométrie, il s'énonce comme suit:

---

[1] Cf. Carl Friedrich von Weizsacker, Le monde vu par la physique, trad. F. Mosser, Paris, Flammarion, 1956, p. 183.

[2] Cf. Heath, The Thirteen Books..., t.1, p.234. Aristote estime que le géomètre ne se sert pas de la droite infinie; il lui suffit d'une droite aussi longue qu'il le désire.

> Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits[1].

Ces deux énoncés sont à la base de la théorie euclidienne des parallèles dont la Proposition 27 du premier livre marque le début. Toutefois Euclide ne fera usage de son fameux postulat qu'à la Proposition 29. Beaucoup de mathématiciens soutiennent qu'Euclide aurait reculé autant que possible le moment où il devrait utiliser ce postulat. On croit déceler, dans ce retard, un signe indiquant l'hésitation d'Euclide devant le postulat des parallèles et, indirectement, devant l'infini. Quoiqu'il en soit de cette opinion, il est incontestable que l'on ne peut bannir totalement l'infini du domaine géométrique: le génie d'Euclide, quelles que furent ses préférences ou ses hésitations, était plus que d'autres en mesure de le reconnaître. Autre point à souligner: pour Euclide et, en général, pour la géométrie euclidienne, l'infini est nettement distingué des entités finies. L'infini est du ressort de la géométrie euclidienne un peu comme l'infini est du ressort de l'arithmétique traitant des nombres naturels ou entiers: ce ne sont pas les nombres eux-mêmes qui sont infinis, mais leur suite. En d'autres termes, Euclide ne considère pas des entités qui seraient en elles-mêmes infinies ou qui seraient situées à l'infini; ce qu'il considère, ce sont des éléments

---

[1] Cette traduction et la précédente proviennent de la vieille édition des oeuvres d'Euclide préparée par F. Peyrard: Les oeuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français, 3 vol., Paris, M. Patris, 1814.

finis mais qui, dans certains cas, évoquent ou font intervenir l'infini.

La géométrie projective, au contraire, considère directement des éléments ou entités infinis, comme le point à l'infini, la droite à l'infini, le plan à l'infini. Cependant il faut ajouter que, grâce à la magie de quelques conventions linguistiques et à un jeu de représentation symbolique, elle a réussi en quelque façon à ramener ces éléments impropres, idéaux, à des éléments ordinaires, c'est-à-dire à ne plus distinguer entre point ordinaire et point à l'infini, entre droite ordinaire et droite à l'infini, entre plan ordinaire et plan à l'infini. Tout cela n'avait pas directement pour but d'écarter habilement et illusoirement l'infini du vocabulaire mathématique, mais plutôt d'introduire une simplification aussi légitime que désirable; et ce, en supprimant certains cas exceptionnels qui obligent à restreindre la portée d'énoncés qui, autrement, pourraient être formulés universellement et en rendant symétriques certains couples d'énoncés[1].

On connaît l'énoncé: deux points déterminent une droite. On souhaiterait que la substitution réciproque des mots 'point' et 'ligne' nous donnât un énoncé qui fût, lui aussi, universellement valide à l'instar du premier. On voudrait pouvoir dire: deux droites déterminent un point dans un même plan. Mais on

---

[1] Cf. G. Verriest, Les nombres et les espaces, Paris, Armand Colin, 1951, pp. 42-51; Lucien Godeaux, Les géométries, Paris, Armand Colin, 1947, pp. 73-77.

pense tout de suite à l'exception constituée par les droites parallèles qui ne se coupent pas et ne déterminent donc aucun point qui leur soit commun. S'il était possible de faire disparaître ce cas exceptionnel, nous aurions deux énoncés parfaitement symétriques; le changement des termes 'point' et 'droite' donnerait, en outre, deux énoncés universellement valables. Par là serait obtenue ce que les mathématiciens appellent la 'dualité' dans le plan; ils y voient un immense avantage. Si en effet la substitution réciproque engendre automatiquement un énoncé valable, le travail devient singulièrement réduit, car il suffit alors de prouver un des deux énoncés pour obtenir immédiatement, grâce à la loi de dualité, un second énoncé tout aussi valable, sans autre effort que celui d'interchanger quelques mots.

Mais comment réaliser cet ambitieux projet? Comment élaborer le plan projectif? On a dû franchir les étapes suivantes. Deux droites d'un même plan ou bien se coupent ou bien ne se coupent pas. Se couper, pour deux droites, c'est posséder un point commun; ne pas se couper, c'est n'avoir aucun point commun; et c'est là le cas des parallèles, cas exceptionnel qui vient limiter la généralité de l'énoncé: deux droites d'un même plan ont un point commun ou déterminent un point. Les parallèles ont pourtant une propriété en commun, celle de posséder une même direction. Cette direction est en quelque sorte déterminée par un point à l'infini vers lequel elles tendent et où elles sembleraient devoir se rencontrer. Si l'on identifie point à l'infini et direction, rien ne nous empêche de dire, sans restriction aucune, que deux droites déterminent un point. Ce point sera un point ordinaire s'il s'agit de non-parallèles, un point extraordinaire, impropre, idéal s'il s'agit de parallèles. Mais le terme 'parallèle' est inadmissible en géométrie projective parce qu'il implique mesure. La géométrie projective ne distinguera donc plus entre point ordinaire et point idéal, point propre et point impropre ou à l'infini. De cette façon, il ne pourra plus être question de distinguer entre droites concourantes et droites parallèles. Telle est la droite en géométrie projective[1]. On pourrait étendre ces considérations au plan et à l'espace, mais notre propos ne l'exige pas.

Ces remarques sur la géométrie projective pourraient nous laisser croire que l'infini y est frappé d'interdit. En réalité, c'est plutôt l'inverse qui se vérifie. La géométrie projective en effet n'entend pas limiter son étude aux entités ordinaires, i.e., situées à distance finie, elle entend au contraire l'étendre même sur les éléments impropres, i.e., situés à l'infini. Mais, pour ce faire, elle doit réduire ces éléments impropres à des éléments ordinaires et les considérer comme non-exceptionnels. Cette réduction à du fini est d'ailleurs la seule façon dont le mathématicien, en général, puisse s'occuper de l'infini comme nous le verrons mieux un peu plus loin.

---

[1] Cf. Verriest, Les nombres et..., p. 46; R. Courant et H. Robins, What is mathematics?, London, Oxford Univ. Press, (c. 1941), pp. 180-83; Nathan A. Court, Mathematics in Fun and in Earnest, New York, The New American Library of World Literature, 1961, p. 94; H.S.M. Coxeter, The Real Projective Plane, New York, McGraw-Hill, 1949, pp. 4, 5 et 98.

Le XVIIe siècle, qui imprima aux mathématiques un si vigoureux élan, devait inaugurer une nouvelle ère pour l'infini en ce domaine. Le rôle que l'infini devait être appelé à y jouer était un rôle nouveau aussi bien par son importance que par sa nature. Jusque-là, conformément à l'esprit grec, ses relations avec la mathématique avaient été un peu celles d'un proche voisin, un peu embarrassant, mais étranger à la famille. On ne peut éviter la présence et la rencontre occasionnelle du voisin étranger, mais il ne fait pas partie de la famille; on se passerait volontiers de sa présence, on pourrait même aller jusqu'à éviter de le rencontrer sans manquer aux convenances. Telle était, pour ainsi dire, l'attitude qu'on avait eue jusque-là vis-à-vis de l'infini. Il n'était pas un membre de la famille mathématique, admis dans son intimité; on consentait à le rencontrer, à l'envisager lorsque sa présence devenait inévitable, mais on faisait tout pour s'en passer.

La découverte du calcul infinitésimal, attribuée à Newton et à Leibniz, devait modifier profondément cette attitude. Cette modification toutefois ne se fit pas du soir au matin, ni sans heurts, sans controverses et sans résistances. Avec le calcul différentiel et intégral, avec le calcul des séries infinies, l'infini perdait en effet son statut d'étranger: il était invité à prendre place au sein même de la famille mathématique. Non pas peut-être à titre de membre de plein droit, mais au moins comme serviteur et instrument indispensable. Et, à ce titre même, il était appelé à jouer en mathématiques un rôle de toute première importance, à y occuper une place incommensurable.

> Le rôle considérable que joua immédiatement ce calcul dans toutes les parties des mathématiques le fit bientôt regarder comme la base fondamentale de l'instrument par excellence de la Mathématique pure,... D'ailleurs les difficultés philosophiques auxquelles semblait donner lieu la notion d'infini, le mystère qui l'enveloppait en apparence, incitaient naturellement les analystes à considérer le nouveau calcul comme radicalement différent de l'ancien. On crut donc de bonne foi que l'on était entré dans une ère nouvelle et que les découvertes de Newton et de Leibniz avaient révolutionné la science mathématique[1].

Il n'entre pas dans les cadres de cette étude de retracer l'histoire complète des mathématiques du XVIIe siècle ni même celle de l'analyse infinitésimale[2]. Nous nous contenterons ici de souligner le changement de climat qui se fit jour dans la façon d'envisager l'infini en mathématiques et de dégager les bases de l'analyse infinitésimale et les éléments communs au calcul infinitésimal, au calcul intégral et au calcul sérial. Une fois bien mise en relief la structure commune de ces calculs, nous pourrons faire la comparaison entre la situation ancienne et la situation nouvelle créée par les innovateurs du XVIIe siècle.

---

[1] Pierre Boutroux, L'idéal scientifique des mathématiciens, nouv. éd., Paris, P.U.F., 1955, p. 111.

[2] On peut, sur ce sujet, consulter maints ouvrages d'histoire des mathématiques; entre autres, les suivants: J.F. Montucla, Histoire des mathématiques, 4 vol., Pairs, Albert Blanchard, 1960, t.3; Léon Brunschicg, Les étapes de la philosophie mathématique, 3e éd., Paris, P.U.F., 1947; Boutroux, L'idéal scientifique...; Histoire générale des sciences, 4 vol., Paris, P.U.F., t.2, La science moderne.

Dans les calculs différentiel, intégral et sérial, il existe un élément commun: dans les trois cas en effet, on trouve un processus infini, une opération toujours identique en nature, mais indéfiniment répétée de proche en proche selon une loi régulatrice. Dans le calcul différentiel, cette itération peut être assimilée à un processus de division s'effectuant sur une quantité qui décroît sans cesse et s'approche de zéro; dans le calcul intégral, cette itération prend la forme d'une addition de parties, ce qui vaut également pour les séries.

Pour les besoins de notre étude, il n'est aucunement nécessaire que nous examinions tous et chacun des cas de processus infinis. Nous pouvons au contraire, et sans le moindre inconvénient, n'en retenir qu'un seul pour illustrer une situation qui est commune à tous. Et celui que nous retiendrons, ce sera celui des séries parce qu'il apparaît comme le plus facile.

La série se présente comme une entité mathématique complexe, formée par l'addition successive de termes où chacun s'obtient à partir du précédent d'une façon uniforme et d'après une loi bien déterminée. Une série quelconque peut se représenter symboliquement de la façon suivante:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Une série apparaît donc comme une sommation indéfinie, i.e., un processus d'addition où l'on peut toujours ajouter un nouveau terme, où, en d'autres mots, il n'y a pas de dernier terme. Personne doué de saine raison ne songerait à entreprendre une addition de ce genre avec l'espoir qu'il pourrait la terminer un jour; il est clair que pareille entreprise est d'avance vouée à l'échec. Comment, dans ces conditions, peut-on encore prétendre qu'une telle expression peut avoir -dans certains cas- une somme que S pourrait désigner? On devra comprendre que le terme 'somme' n'a pas alors le sens usuel qu'on lui prête d'ordinaire, i.e., qu'il ne désigne pas alors le résultat de cette opération primitive qu'on connaît bien et qui comporte des étapes plus ou moins nombreuses, mais en nombre fini. Il n'en va pas de même dans le cas des séries infinies: on trouve bien là une analogie avec le cas fini pour autant que, dans les deux cas, il s'agit d'opérations d'addition, mais là s'arrête la ressemblance. La somme est le résultat d'une suite d'opérations possibles parce qu'elles sont en nombre limité; lorsque le nombre des opérations devient infini, le processus devient impossible et il ne peut être question de parler de résultat, de somme. Le terme'somme', s'il est moins approprié dans un tel contexte, demeure toutefois d'un usage courant: il ne désigne alors rien d'autre que la limite vers laquelle une suite infinie de sommes partielles[1] peut tendre.

---

[1] La série n'est en effet qu'un cas particulier de suite: celui où chaque terme est constitué par des sommes partielles différant l'une de l'autre par la possession d'un terme de plus que la précédente.

Conséquemment, plutôt que de somme, il vaudrait mieux parler de valeur-limite ou, plus simplement, de limite vers laquelle tend la série[1]. Calculer la somme d'une série -lorsque cette somme peut être calculée- ce n'est rien d'autre que déterminer la valeur finie et fixe vers laquelle tend la série sans jamais l'atteindre effectivement. Le processus infini, illimité, se ramène ainsi au calcul et à la détermination d'une limite, il devient un passage à la limite. Or il y a là un point d'une importance souveraine. Personne n'est capable d'effectuer une infinité d'opérations quelle qu'en soit la nature; mais on peut effectuer, d'une façon plus ou moins aisée selon les circonstances, un passage à la limite pour la simple raison que semblable passage ne requiert qu'un nombre fini d'opérations. En d'autres termes, les processus infinis, l'analyse infinitésimale, l'algèbre de l'infini ne sont possibles que parce qu'ils se ramènent à une algèbre du fini.

La situation qui vient d'être décrite est brièvement, mais lumineusement exposée par un mathématicien contemporain. Dans son ouvrage intitulé The Taylor Series et destiné à servir d'introduction à la théorie des fonctions d'une variable complexe, l'auteur, P. Dienes, reconnait nettement cette réduction de l'infini au fini qui se trouve à la base même du traitement mathématique des séries. Le passage vaut la peine d'être cité à

---

[1] Cf. Knopp, Theory and Application..., p. 102.

cause de sa précision et de sa clarté. Comme le passage en question contient des références à des expressions symboliques qui apparaissent dans le texte avant les lignes citées, nous devons d'abord mentionner ces expressions symboliques. Il s'agit de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \text{ ad inf.,} \qquad (1)$$

et de

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Et voici le passage en cause:

> We first of all notice that an infinite succession of additions like (1) cannot be carried out, and consequently cannot be thought of as completely carried out. Taking $\lim s_n$ (if it exists) as the sum of (1), we assign a 'sum' to (1) by a more or less arbitrary definition which, at first sight, seems very much like the original infinite succession of sums. The great advantage, however, of our definition of the sum as a limit of a sequence is that <u>the determination of limit does not involve an infinite succession of operations</u>.
> We have proved in a thoroughly <u>finite</u> way that 0 is the only number which is not isolated from the numbers of the form $1/n$, i.e. that $\lim 1/n = 0$. We determine in a similar direct way the limits of certain other concrete sequences and reduce unknown cases to known ones by simple and finite rules[1].

---

[1] P. Dienes, <u>The Taylor Series</u>, New York, Dover, 1957, pp. 70-71. Les soulignés sont de Dienes lui-même. Abel Rey, dans son ouvrage sur <u>L'apogée de la science technique grecque</u>, (Paris, Albin Michel, 1948) écrit exactement dans le même sens: "L'infini en tant que tel se laisse atteindre par le fini, ou il nous échappe". Ajoutons encore cette autre déclaration de Hermann Weyl, déjà rapportée plus haut: "Mathematics is the science of the infinite, its goal the symbolic comprehension of the infinite with human, that is finite, means". (<u>The Open World</u>, New Haven, Yale Univ. Press, 1932, p. 7)

Les considérations précédentes valent, mutatis mutandis, pour les autres processus infinis tels que les fractions continues[1], les produits infinis, le calcul différentiel et le calcul intégral. On y trouve toujours la réduction du processus indéfini à un passage à la limite qui, lui, ne comporte plus qu'un nombre limité d'opérations.

Personne ne songerait à contester l'étonnante fécondité ni l'immense utilité des processus infinis. Ils ont ouvert la voie à des développements extraordinaires tant en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Grâce à ce nouveau calcul, grâce à l'utilisation des processus infinis, on parvient fort aisément et fort élégamment à des résultats que les prédécesseurs avaient parfois obtenus par d'autres méthodes, mais péniblement. Cette analyse infinitésimale qui s'est avérée d'une fécondité si prodigieuse a été considérée, à bon droit, comme une nouveauté; elle a également été présentée comme une nouvelle prise de position devant l'infini. Alors que les mathématiciens plus anciens et, en particulier, les Grecs s'étaient carrément récusés devant l'infini, ceux du XVIIe siècle ont dû, courageusement, faire face à l'infini pour le maîtriser d'abord -pour autant que cela soit possible-, et pour l'utiliser ensuite, couramment, dans leurs calculs.

---

[1] Traitant des fractions continues infinies comme représentatives des nombres irrationnels, H. Davenport remarque: "Now the only way in which one can attach a meaning to the result of carrying out an infinite number of operations is by using the notion of a limit". (The Higher Arithmetic, New York, Harper & Brothers, Harper Torchbooks, 1960, p. 91).

Il est vrai de dire que les mathématiciens grecs ont évité les processus infinis. Pourtant les idées et notions que les mathématiciens du XVIIe siècle ont exploitées avec un si rare bonheur n'avaient rien de nouveau pour les Grecs; il les connaissaient depuis fort longtemps. Une autre chose est également certaine: ils n'en ont pas tiré parti. Pourquoi? On pourra avancer de nombreuses explications, échafauder maintes hypothèses ingénieuses, mais il est probable qu'on ne saura jamais la véritable raison de cette abstention. On peut cependant se demander jusqu'à quel point l'absence d'un symbolisme numérique approprié aura empêché les Grecs de s'aventurer dans les processus infinis[1].

Essayons toutefois de peindre, à grands traits il va s'en dire, le climat qui prévalait à l'époque grecque où l'on trouve en germe l'analyse infinitésimale, au moins sous la forme du futur calcul intégral. Posons quelques jalons. Le nom de Zénon d'Elée vient tout d'abord à l'esprit. Quelles que soient les confusions que Zénon ait pu faire dans son plaidoyer pour rejeter le mouvement, il faut concéder qu'il a dû admettre l'infinie divisibilité du continu; il n'aurait autrement jamais pu argumenter contre le mouvement.

La divisibilité de la grandeur était, chez les mathématiciens, une doctrine assez communément reçue au temps d'Aristote:

---

[1] A ce propos, voir la note 3 de la page 162.

elle est même rapportée par ce dernier comme une des raisons qui ont incité ses devanciers à poser l'infini[1]. Il sera lui-même de cet avis, précisant que le processus de division de la grandeur est tel que jamais on ne pourra proposer une longueur si petite qu'on ne pourrait pas dépasser en petitesse grâce au processus de division[2]. Mais Aristote ne s'arrête pas là, il va beaucoup plus loin en greffant sur ce processus de division un processus inverse d'apposition. Or ce processus d'apposition a ceci de significatif qu'il ne permet pas de dépasser toute quantité finie même s'il est poursuivi sans fin[3].

Mais le mathématicien grec n'a jamais tiré profit de ces processus à l'infini bien qu'il ne les ignorât pas. Même la 'méthode d'exhaustion' qui se situe pourtant dans le sillon

---

[1] Physique, III, c.4, 203 b 15; S. Thomas, In III Phys., lect. 7.

[2] Physique, III, c.6, 206 b 18; S. Thomas, In III Phys., lect. 10; voir aussi Euclide, Eléments, X, prop. 1.

[3] Physique, III, c.6, 206 b 18. Le commentaire de S. Thomas sur ce passage nous paraît étonnant. S. Thomas en effet apporte là un exemple pour illustrer l'enseignement d'Aristote; il veut montrer que le processus d'apposition, alimenté par un processus antérieur de division, permet de s'approcher indéfiniment, mais sans jamais l'atteindre, d'une valeur finie et déterminée. Nous dirions, nous, que le processus converge et possède une limite. Or, cet exemple se laisse traduire, sans la moindre difficulté, en langage analytique. Cette traduction nous fournit un exemple simple d'une série infinie convergente. Mais S. Thomas n'aurait pu faire cette traduction parce qu'il ne disposait pas, comme nous, des 'chiffres arabes' qui rendent possible et aisée une telle traduction. Je suis persuadé que S. Thomas aurait fait comme nous s'il avait connu le symbolisme numérique que nous utilisons.

des processus infinis n'a rien du processus véritablement infini. La majorité[1] des historiens de la mathématique grecque attribuent à Eudoxe l'invention de cette méthode, utilisée avec un rare succès par Archimède, à tel point que nombreux sont ceux qui, à la suite de Leibniz, voient en lui le précurseur, voir le "premier fondateur du calcul infinitésimal"[2]. La méthode d'exhaustion, à l'instar des processus infinis, est un processus d'approximation. Mais si la méthode d'exhaustion consiste dans un processus susceptible d'être indéfiniment poursuivi, il reste que les Grecs, et en particulier Archimède, l'ont conçue et utilisée comme un processus strictement fini. A preuve, la façon dont Archimède utilise le processus pour évaluer la longueur de la circonférence d'un cercle dans son traité de <u>La mesure du cercle</u>. Il inscrit dans un cercle une suite de polygones réguliers allant du triangle équilatéral jusqu'au polygone régulier de 96 côtés dont il évalue le périmètre. D'autre part, il circonscrit au même cercle une suite de polygones réguliers dont le dernier aura également 96 côtés; et il évalue le périmètre de ce polygone. Il aboutit, finalement, à cette inégalité:

$$3 \; 10/71 < \pi = C/2R = C/D < 3 \; 1/7,$$

---

[1] T. Heath fait exception: il fait remonter à Antiphon l'invention du principe d'exhaustion. Cf. P.H. Michel, <u>De Pythagore à Euclide</u>, Paris, Les Belles Lettres, 1950, pp. 238-39, pp. 673-74; T. Heath, <u>Mathematics in Aristotle</u>, Oxford, Clarendon Press, 1949, p. 96.

[2] Abel Rey, <u>L'apogée de la science technique grecque</u>, Paris, Albin Michel, 1948, pp. 257-58.

où C désigne la longueur de la circonférence, R le rayon du cercle et D le diamètre du cercle. La méthode d'approximation des Grecs est un processus limité qui évite totalement la répétition illimitée du processus infini. Pas plus que l'analyse ancienne, l'analyse moderne n'est capable d'effectuer la répétition illimitée d'une même opération dans une suite infinie. A la différence de son prédécesseur grec, le mathématicien moderne n'évitera pas l'infini en se rabattant sur une suite finie quoique de caractère semblable, mais il transformera le processus infini indiqué en un autre processus qui n'exige qu'un nombre fini d'opérations et qui consiste dans un passage à la limite, c'est-à-dire dans le calcul de la valeur vers laquelle tend le processus infini s'il pouvait être effectué. On ne peut s'empêcher de citer ici un passage de T.L. Heath qui décrit fort bien le point de vue grec:

> They (the Greeks) never spoke of an infinitely close approximation of a limiting value of the sum of a series extending to an infinite number of terms. Yet they must have arrived practically at such a conception, e.g., in the case of the proposition that circles are to one another as the squares on their diameters, they must have been in the first instance led to infer the truth of the proposition by the idea that the circle could be regarded as the limit of an inscribed regular polygon with an indefinitely increased number of correspondingly small sides. They did not, however, rest satisfied with such an inference; they strove after an irrefragable proof, and this, from the nature of the case, could only be an indirect one. Accordingly we always find, in proofs by the method of exhaustion, a demonstration that an impossibility is involved by any other assumption than that which the proposition maintains. Moreover this stringent verification, by means of a double

> *reductio ad absurdum*, is repeated in every individual instance of the use of the method of exhaustion; there is no attempt to establish, in lieu of this part of the proof, any general propositions which could be simply quoted in any particular case[1].

Terminons ce chapitre en remarquant que malgré la place énorme que l'infini s'est taillée en mathématiques, grâce aux processus infinis sous toutes leurs formes, la dernière étape n'était pas encore franchie, la dernière conquête du territoire restait à faire. Elle vint à la fin du siècle dernier avec la création de l'arithmétique transfinie par Georg Cantor. Jusqu'à ce moment, les mathématiciens avaient admis et utilisé avec un succès retentissant et sans cesse accru l'infini en mathématiques. Mais il ne s'agissait encore uniquement que de l'infini qualifié de potentiel, par opposition à l'infini actuel. Cantor introduisit l'infini actuel en mathématiques.

---

[1] Heath, *The Works of Archimedes*, pp. CXLII-CXLIII. Voir aussi Carl B. Boyer, *The Concepts of the Calculus*, New York, Hafner, 1949, p. 53; Rey, *L'apogée de la science...*, p. 257.