CHAPITRE II

LA THEORIE DES ENSEMBLES

L'arithmétique transfinie présuppose la théorie des ensembles. Il serait en conséquence inutile d'entreprendre l'étude de la première sans s'initier d'abord aux ensembles. L'étude que nous entendons faire de l'arithmétique transfinie nous dispense toutefois de nous aventurer très avant dans le domaine des ensembles. Un bref exposé des notions fondamentales est tout ce qui nous est nécessaire.

Tous les mathématiciens qui ont traité des ensembles -on parle aussi d'aggrégats, de classes- ne croient pas nécessaire de dire ce qu'est un ensemble. Certains, tel Sierpinski, considèrent qu'il s'agit là d'une notion tellement primitive, tellement évidente et connue de tous qu'il suffit d'en donner des exemples pour la faire connaître parfaitement[1]. D'autres cependant, tel Hausdorff, s'ils se rangent en définitive à cet avis, voudront quand même ajouter une brève explication.

---

[1] Waclaw Sierpinski, Leçons sur les nombres transfinis, Paris, Gauthiers-Villars, 1950, p. 1.

Hausdorff précisera donc qu' "un ensemble résulte de la réunion en un tout d'entités individuelles. Un ensemble est une multitude pensée comme une unité"[1]. La plupart des auteurs toutefois donnent d'un ensemble la définition ou description qu'en a proposée Georg Cantor lui-même: "By an 'aggregate' (Menge) we are to understand any collection into a whole (Zusammenfassung zu einem Ganzen) M of definite and separate objects m of our intuition or our thought"[2]. L'ensemble apparait donc comme la réunion en un tout d'objects bien déterminés et distincts de notre intuition ou de notre pensée. Cette description appelle quelques remarques que nous ferons aussi brèves que possible.

On ne peut vraiment parler de réunion que là où il y a une pluralité, mais une pluralité ramenée à quelque chose d'un. Pluralité et unité, tels sont donc les deux éléments constitutifs de la notion d'ensemble[3]. L'unité inscrite dans la notion d'ensemble est d'une extrême importance: s'il n'y avait que pure multiplicité, dispersion totale, le traitement des ensembles,

---

1 F. Hausdorff, Mengenlehre, 3e éd., New York, Dover Publications, p. 11: "Eine Menge entsteht durch Zusammenfassung von Einzeldingen zu einem Ganzen. Eine Menge ist eine Vielheit, als Einheit gedacht".

2 Georg Cantor, Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, trad. Philip E.B. Jourdain, New York, Dover, 1915, p. 85.

3 Il faut toutefois noter que les besoins de la généralisation des opérations, d'une part, et, d'autre part, ceux de la simplification et de l'uniformisation du vocabulaire inciteront à étendre l'usage de ce terme 'ensemble' même aux cas où il ne se trouve aucune pluralité: on parlera couramment de 'l'ensemble unité' et de 'l'ensemble nul'. Cette situation correspond à celle de 'un' et de 'zéro' qu'on n'a plus aucun scrupule à appeler des nombres.

des ensembles infinis en particulier, deviendrait à priori impossible. Mais de quelle unité s'agit-il? Si l'unité d'un ensemble peut être fondée sur la similitude de naure des éléments qui le composent, il n'est pas indispensable à la notion commune d'ensemble qu'elle possède une unité aussi ferme. L'unité requise et suffisante à la notion d'ensemble est tout ce qu'il y a de plus fragile et de plus ténu: il suffit en effet que l'intelligence mette ensemble plusieurs choses qui peuvent être aussi disparates qu'on voudra. C'est une unité accidentelle qu'on serait tenté d'appeler, assez à propos du reste, une unité de fabrication[1]: elle est en effet fondée souvent sur la seule décision et le seul caprice de celui qui conçoit un ensemble.

Il importe peu à la notion commune d'ensemble que celui-ci soit composé d'éléments de même nature ou non. Tout ce qui est requis c'est qu'ils soient individuellement distincts l'un de l'autre de telle sorte qu'un même symbole représentatif, s'il est répété, n'est censé représenter qu'un seul et même objet. En vertu de cette condition, un ensemble tel que (1, 2, 1, 3) n'est aucunement différent de l'ensemble (1, 2, 3). En

---

[1] S. Thomas, sur ce point, a deux passages fort éloquents. Ils méritent d'être mentionnés. Tous deux sont tirés de son commentaire sur les <u>Sentences</u>. "In collectivo (nomine) enim est duo considerare, scilicet multitudinem eorum quae colliguntur, quae simpliciter sunt per essentiam divisa; et id in quo colliguntur, quae est <u>minima unitas</u>". (In I <u>Sent</u>., d.24, q.2, a.2, ad 3). "Et inde potest esse quod unum est pars multitudinis, et quod ipsa multitudo dicitur quodammodo unum, prout scilicet aliquid non dividitur, <u>ad minus secundum intellectum aggregantem</u>". (<u>Ibid</u>., q.1, a.3, ad 4).

outre la notion commune d'ensemble ne tient pas compte de l'ordre des éléments: ainsi, (1, 2, a, b) et (a, b, 2, 1) seront considérés comme un seul et même ensemble. On ne doit pas toutefois en conclure que l'ordre des éléments est toujours indifférent. La théorie des ensembles tient parfois compte de l'ordre des éléments, elle étudie parfois des ensembles ordonnés, mais leur étude constitue un chapitre spécial de la théorie générale et commune des ensembles, chapitre qui se situe en dehors de nos préoccupations présentes.

D'après la définition précédente, tout ensemble est de la nature d'un tout, mieux encore, d'un tout intégral; et les parties qui le composent et le constituent sont ses parties intégrantes, ses éléments constitutifs, quelle que soit leur nature. On dira couramment, en conséquence, que l'ensemble contient, renferme ses éléments constitutifs et que ceux-ci sont contenus dans l'ensemble et lui appartiennent. Cette relation d'appartenance d'un élément à un ensemble s'exprimera symboliquement par

$$m \in E,$$

où m représente l'élément, E un ensemble quelconque et $\in$ la relation d'appartenance.

La théorie des ensembles s'occupe de bien d'autres relations que de la relation d'appartenance et qui sont de loin beaucoup plus importantes qu'elle. Ce sont les diverses relations qui surgissent de la comparaison des ensembles entre eux. Si on compare deux ensembles, diverses situations peuvent se présenter dont voici la première. Deux ensembles peuvent ou bien être apparentés ou bien être complètement étrangers l'un à l'autre. S'ils sont étrangers, c'est qu'ils n'ont aucun élément en commun; on dira alors qu'ils sont disjoints. S'ils ne sont pas disjoints, mais apparentés l'un à l'autre, cela veut dire qu'ils ont en commun au moins un élément. Par exemple, les deux ensembles

(1, 3, 5, 7, 9) et (2, 4, 5, 6, 8, 10)

sont apparentés parce qu'ils ont l'élément 5 en commun. Plusieurs cas sont alors possibles. Il arrivera, par exemple, que deux ensembles seront constitués exactement des mêmes éléments: on les dira alors égaux. Ils seraient plus justement appelés identiques, car, dans la théorie des ensembles, la relation d'égalité comporte plus que la seule 'même pluralité' d'éléments; elle requiert en outre l'identité de ces éléments dans un ensemble comme dans l'autre: v.g., (1,2, 3, 4) est égal à (4, 3, 2, 1). Lorsque, d'un ensemble à l'autre, l'identité des éléments disparaît pour ne laisser subsister que la seule 'même pluralité' des éléments, on aura la relation d'équivalence, mais non la relation d'égalité. Ainsi les ensembles (1, 2, 3, 4) et (A, B, C, D) sont équivalents, mais non pas égaux. On voit sans peine que deux ensembles égaux sont équivalents, mais deux ensembles équivalents ne sont pas égaux si ce n'est par accident. Cette notion d'équivalence de deux ensembles est d'une importance primordiale pour l'arithmétique transfinie. Le symbole usuel d'égalité servira aussi bien pour les ensembles que pour les nombres. Si E et M sont deux ensembles égaux, on écrira:

$$E = M.$$

S'ils sont simplement équivalents, on écrira:

$$E \sim M.$$

Entre les cas extrêmes où deux ensembles sont disjoints ou égaux, s'échelonnent divers cas où les deux ensembles, cependant, possèdent toujours une partie commune. Parfois chacun des ensembles aura sa partie propre en plus de la partie commune. Parfois encore, un seul possèdera une partie propre en plus de la partie commune; en pareil cas, tous les éléments du premier ensemble se retrouveront dans le second qui, lui, englobera un nombre plus ou moins considérable d'éléments additionnels, v.g., (a, b, c) et (a, b, c, d, e, f, g). En d'autres termes, dans ce cas, tous et chacun des éléments d'un ensemble sont aussi des éléments de l'autre ensemble sans que l'inverse soit vrai. On dénomme <u>sous-ensemble</u> celui dont tous les éléments sont contenus dans l'autre: le sous-ensemble apparaît ainsi comme une partie, une partie intégrante, d'un ensemble. Tel est le sens strict du terme sous-ensemble. Par extension toutefois, on parlera encore de sous-ensemble lorsque le sous-ensemble et l'ensemble sont identiques; il est clair que le terme 'sous-ensemble' est alors employé dans un sens large. Cela veut dire, en d'autres mots, que tout ensemble est un sous-ensemble de lui-même, un sous-ensemble impropre, cela va de soi. Voyons un exemple. Soit l'ensemble M = (a, b, c, d, e) et l'ensemble E = (a, c, e). E sera un sous-ensemble propre de M, ce que l'on désignera symboliquement par

$$E \subset M.$$

Quant à M lui-même, il est aussi un sous-ensemble de M, mais un sous-ensemble impropre puisque $M = M$.

Ces données ont besoin d'être complétées. Car le mathématicien ne se contente pas d'établir des relations entre deux ensembles; il désire en outre combiner entre eux deux ou plusieurs ensembles ou, si l'on préfère, il désire définir et effectuer des opérations sur les ensembles. Il nous faut donc mentionner maintenant les opérations principales qu'on peut effectuer avec les ensembles. Elles sont au nombre de deux: la réunion et l'intersection.

L'union ou la réunion de deux ensembles est la mise en commun de tous les éléments ou termes qui appartiennent à l'un <u>ou</u> à l'autre ensemble que l'on veut fusionner. On appellera encore cette opération <u>somme logique</u> à cause de sa ressemblance avec l'addition ordinaire et le signe usuel de l'addition servira à la désigner. Si $A = (a, b, c, d)$ et $B = (a, c, m, n)$, la réunion de A et B donnera un ensemble C tel que

$$C = A + B = (a, b, c, d, m, n).$$

L'ensemble résultant de l'union de deux ensembles est donc constitué par la partie commune aux deux ensembles s'ils en ont une, plus la partie propre à chacun.

L'intersection de deux ensembles engendrera un ensemble formé de tous les éléments appartenant à la fois à l'un et à l'autre ensemble; en d'autres termes, il est composé de leur partie commune. Cette opération sera désignée aussi par l'expression produit logique bien qu'elle n'ait aucune ressemblance avec l'opération arithmétique du même nom. Si l'on reprend les deux ensembles A et B définis plus haut, nous aurons, pour leur intersection, un ensemble D tel que

$$D = A \cdot B = (a, c).$$

Il est clair que l'intersection de deux ensembles disjoints, i.e., sans partie commune donnera l'ensemble vide 0. Soient, par exemple, $A = (m, n)$ et $B = (r, s)$; leur intersection sera:

$$A \cdot B = 0.$$

Une étude plus élaborée exigerait qu'on s'attarde à considérer les propriétés relatives à chacune de ces opérations et celles qui appartiennent aux deux lorsqu'elles sont combinées ensemble. Mais, pour nous, il est plus important d'examiner brièvement une autre division des ensembles. D'après cette nouvelle division, le domaine des ensembles se partage en deux grandes catégories: les ensembles finis et les ensembles infinis. Il n'est pas facile de marquer la différence entre ces deux catégories sans tomber dans un cercle vicieux. On dira par exemple qu'un ensemble est fini ou infini selon qu'il renferme ou non un nombre ou une pluralité finie d'éléments. On tentera de camoufler le cercle vicieux en disant que l'ensemble fini est celui dont les éléments correspondent à une section de la série des nombres naturels, sachant bien, mais évitant de l'exprimer, que cette série est illimitée, infinie. Nous n'allons toutefois pas nous arrêter à ces difficultés; nous nous contentons, sur ce point, de rapporter ce que disent les mathématiciens.

La classe des ensembles infinis renferme deux sortes d'ensembles de cette nature: les ensembles <u>dénombrables</u> et les ensembles <u>non-dénombrables</u>. Selon la terminologie reconnue par l'usage, un ensemble infini est qualifié de dénombrable si ses éléments peuvent être mis en correspondance bi-univoque avec les nombres naturels; mais, si pareille correspondance est impossible, il sera dit non-dénombrable. En qualifiant de dénombrable un ensemble infini, on a forgé un terme impropre à la situation qu'il entend caractériser, on a inventé une terminologie qui n'est pas heureuse. Et on a encore aggravé la situation en incluant sous le vocable d'ensembles dénombrables même les ensembles finis. De sorte que, pour respecter les usages reçus parmi les mathématiciens, il faut entendre par ensembles dénombrables soit les ensembles finis soit les ensembles infinis qui sont équivalents aux nombres naturels. Et ainsi, la catégorie des ensembles dénombrables chevauche sur les ensembles finis et sur les ensembles infinis dont elle englobe une section[1]. Si l'on peut et si l'on doit regretter cette situa-

---

[1] Cf. E. Kamke, <u>Theory of Sets</u>, trad. F. Bagemihl, New York, Dover Publ. Inc., pp. 1-2.

tion, on ne peut malheureusement rien faire d'autre que de continuer à utiliser cette terminologie.

CHAPITRE III

L'ARITHMETIQUE TRANSFINIE

L'arithmétique transfinie prend place parmi les études mathématiques de l'infini. Aucune autre discipline n'en fait une étude aussi expresse, car, seule parmi toutes les autres, elle l'étudie pour lui-même. Et c'est justement pour cette raison qu'elle constitue en quelque sorte comme le dernier palier, le niveau supérieur des études mathématiques consacrées à l'infini. Mais on pourrait difficilement y voir un couronnement, même si c'est là l'opinion de plusieurs. Comment en effet voir un couronnement dans ce qui ébranle les assises mêmes d'un édifice et le secoue dangereusement. L'arithmétique transfinie donne en effet naissance à d'inquiétants paradoxes, à des antinomies indésirables qu'on s'efforce d'éliminer. Mais les solutions qu'on propose pour écarter ces situations gênantes paraissent souvent plus factices que convaincantes; elles ont parfois même l'allure de pirouettes exigeant des contorsions ni naturelles ni rassurantes.

Nous n'entreprendrons pas d'exposer ici toute l'arithmétique transfinie. Seules les données primitives et fondamentales sont indispensables à notre étude. Le but assez limité que nous poursuivons ne nous dispense pas toutefois de la nécessité d'une vue globale de l'arithmétique transfinie. Et le meilleur moyen d'y parvenir, c'est, semble-t-il, d'expliquer le plus simplement du monde ce qui se cache derrière ce titre d'arithmétique transfinie en établissant une comparaison entre elle et l'arithmétique élémentaire, celle qui nous est si familière et depuis si longtemps connue.

L'arithmétique transfinie est d'abord une arithmétique. De ce fait, elle partagera avec l'arithmétique ordinaire ou élémentaire certains traits communs aux deux. Qu'est-ce donc que l'arithmétique qui nous est familière? Dissipons tout d'abord une équivoque possible. Le mot 'arithmétique' peut en effet désigner deux disciplines: la théorie des nombres ou arithmétique supérieure que les Grecs appelaient simplement arithmétique, et aussi la discipline élémentaire du calcul que les Grecs appelaient 'logistique', mais que nous appelons couramment, de nos jours, arithmétique. C'est ce dernier sens que nous retenons, celui de discipline du calcul élémentaire.

Discipline primitive et élémentaire, l'arithmétique enseigne comment effectuer les opérations les plus simples et les plus fondamentales avec les nombres les plus simples et les plus primitifs. Ces opérations fondamentales sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, auxquelles on pourrait encore ajouter l'élévation à une puissance et l'extraction d'une racine: elles consistent toutes à combiner deux nombres selon des lois bien déterminées de façon à obtenir un troisième nombre également bien défini. Les entités mathématiques sur lesquelles portent ces opérations sont les premiers ensembles de nombres: les nombres naturels, les nombres entiers, les nombres rationnels et les nombres réels. Tous ces ensembles sont successivement issus de l'ensemble initial, celui des nombres naturels. A l'intérieur de chacun, on trouve une infinité d'éléments ordonnés en une suite de valeurs croissantes, mais où chaque élément représente une quantité finie, bornée.

A l'instar de sa parente, l'arithmétique transfinie comportera, elle aussi, un certain nombre d'opérations: elles se réduiront à trois, l'addition, la multiplication et l'élévation à une puissance. Mais ces opérations s'effectueront non plus sur des nombres ordinaires, finis, mais sur de nouvelles entités mathématiques qu'on appellera de préférence 'nombres transfinis' plutôt que 'nombres infinis' comme si on voulait éviter de parler de nombres infinis. On utilise encore, pour les désigner, le mot 'puissance' -en allemand, mächtigkeit. L'arithmétique qui s'occupe de ces nombres transfinis sera, en conséquence, elle-même appelée 'transfinie'.

L'arithmétique transfinie comporte deux grandes parties. La première s'occupe des nombres cardinaux transfinis, la seconde des nombres ordinaux transfinis. Les premiers correspondent aux ensembles infini où l'on ne porte aucun intérêt à l'ordre des termes qui les composent, mais seulement à la pluralité des éléments dont le nombre cardinal est l'expression et la mesure; les seconds correspondent aux ensembles infinis où l'on retient non seulement la pluralité, mais où l'on tient compte en outre de l'ordre selon lequel les éléments peuvent être disposés à l'intérieur de chaque ensemble.

Puisque l'arithmétique est une discipline qui effectue des opérations avec des nombres, il faut de toute nécessité que ceux-ci lui soient présupposés. Dans le cas de l'arithmétique ordinaire, nous connaissons les nombres soumis à ses opérations de calcul. L'existence de ces nombres ne pose aucun problème, elle est justifiée avec toute l'évidence souhaitable par l'existence de collections finies dont ces nombres expriment et mesurent la pluralité. Mais l'arithmétique transfinie opère avec une catégorie de nombres tout à fait distincts des premiers. Ils se situent au delà des nombres ordinaires et ils nous sont, pour le moment, inconnus. Il faut donc commencer par les introduire. Cette introduction est une tâche délicate, car il ne suffit pas d'inventer une classe plus ou moins abondante de nouveaux symboles qu'on conviendra d'appeler 'nombres transfinis', mais il faut encore justifier et garantir l'existence de ces nouveaux nombres; c'est là la partie vraiment épineuse de l'entreprise, comme nous le verrons dans la suite.

Le nombre transfini constitue une extension de la notion de nombre naturel. On sait que ce dernier n'est rien d'autre qu'une pluralité d'unités ou, comme disaient les Anciens, une multitude mesurée par l'un. Cette notion primitive, fondamentale, a été élargie, et cela, dans deux directions bien différentes.

Les besoins de la mensuration du continu aussi bien que le désir de généraliser les opérations de soustraction, de division et d'extraction d'une racine ont nécessité l'introduction de nouvelles entités mathématiques formant des ensembles de plus en plus riches[1]. Ces ensembles sont ceux des nombres entiers, des nombres rationnels et des nombres irrationnels qui, réunis aux précédents, forment l'ensemble des nombres réels. Toutes ces nouvelles entités mathématiques ont éventuellement été appelées 'nombres' -et bien d'autres à leur suite- , ce qui témoigne d'un élargissement, d'une généralisation de la notion même de nombre[2]. Lorsqu'on tente d'établir une correspondance entre les points d'une droite et les nombres, l'on ne réussit à atteindre la perfection de la correspondance bi-univoque[3] qu'avec les nombres réels. En vertu de cette correspondance, on se croira autorisé à parler des nombres réels comme du '<u>continu arithmétique</u>' par comparaison avec la droite qu'on

---

1 Courant et Robbins, <u>What is Mathematics?</u>, pp. 52-61.

2 Frege, <u>The Foundations of Arithmetic</u>, p. 25.

3 Il existe une correspondance bi-univoque entre deux ensembles A et B si, d'une part, à chaque élément de A correspond un et un seul élément de B et si, inversement, à chaque élément de B correspond un et un seul élément de A.

appellera alors le continu géométrique[1]. Nous trouvons là, et aussi dans cette nécessité des nombres réels pour mesurer convenablement le continu, le fondement requis pour caractériser la première ligne d'extension du nombre naturel. Nous pouvons en effet dire que cette généralisation s'oriente du discret vers le continu tout en demeurant à l'intérieur du fini, car chacun des nombres appartenant à l'un ou l'autre de ces différents ensembles représente une quantité bornée, limitée, finie.

La seconde généralisation revêt un caractère tout différent. Tandis que la première va du discret au continu à l'intérieur du fini, celle-ci va du fini au transfini à l'intérieur du discret. C'est encore un élargissement de la notion de nombre, mais d'une nature tout autre bien que, lui aussi, prenne son point de départ dans le nombre naturel. Mais alors que le nombre naturel mesure des ensembles finis et constitue une pluralité finie, le nombre transfini mesure des ensembles infinis d'unités discrètes. Cantor lui-même nous éclaire là-dessus de façon non équivoque. Malgré sa longueur, le passage mérite d'être cité en entier, tellement il est révélateur.

> The previous exposition of my investigation in the theory of manifolds (i.e., ensembles) has arrived at a point where its continuation becomes dependent upon a generalization of the concept of the real integer beyond the usual limits; a generalization taking a

---

[1] Dirk J. Struik, Lectures in Analytic and Projective Geometry, Cambridge, Addison-Wesley Publ. Co., 1953, p. 2.

direction which, as far as I know, nobody has looked for hitherto.
I depend to such an extent on that generalization of the concept of number that without it I should hardly be able to take freely even the smallest step forward in the theory of sets; may this serve as a justification, or, if necessary, as an apology for my introducing apparently strange ideas into my considerations. As a matter of fact, the undertaking is the generalization or continuation of the series of real integers beyond the infinite. Daring as this might appear, I can express not only the hope but the firm conviction that this generalization will, in the course of time, have to be conceived as a quite simple, suitable and natural step. At the same time, I am well aware that, by taking such a step, I am setting myself in certain opposition to wide-spread views on the infinite in mathematics and to current opinions as to the nature of number[1].

Point à noter soigneusement, ce n'est pas en ajoutant toujours de nouveaux ensembles accrus à la suite des ensembles finis qu'on peut atteindre les ensembles infinis. Parallèlement, ce n'est pas en ajoutant des nombres de plus en plus grands à la suite ordonnée des nombres finis qu'on parviendra aux nombres transfinis. En particulier, les nombres naturels forment une suite ordonnée et ouverte: elle n'a pas de dernier terme. Si grand que soit celui qu'on a posé ou imaginé, on peut toujours en concevoir un plus grand. On pourrait croire qu'en prolongeant indéfiniment cette suite, en lui ajoutant toujours des nombres de plus en plus grands, on finirait par atteindre un premier nombre transfini; mais c'est là une illusion. Cette

---

[1] Ce texte est cité par Abraham A. Fraenkel dans Abstract Set Theory, Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1953, p. 4.

voie est sans issue, elle nous mène nulle part, elle nous laisse irrémédiablement enfermés dans le fini. C'est ce qu'exprime fort bien Bertrand Russell dans le passage suivant:

> Every number to which we are accustomed, except 0, has another number before it, from which it results by adding 1; but the first infinite number does not have this property. The numbers before it form an infinite series, containing all the ordinary finite numbers, having no maximum, no last finite number, after which one little step would plunge us into the infinite. If it is assumed that the first infinite number is reached by a succession of small steps, it is easy to show that it is self-contradictory. The first infinite number is, in fact, beyond the whole unending series of finite numbers[1].

En d'autres termes, on ne peut passer continûment du fini au transfini. Ce n'est que par une savante et audacieuse voltige qui nous transporte brusquement et d'emblée dans l'infini que nous pouvons y parvenir. Il nous faut maintenant dire en quoi consiste cette acrobatie.

La question des nombres cardinaux -les seuls dont nous ayons à nous occuper- est intimement liée à l'évaluation des ensembles. Le nombre cardinal en effet, qu'il soit fini ou transfini, est sans doute une pluralité d'unités abstraites, mais il a en outre comme fonction de révéler et de mesurer la

---

[1] Bertrand Russell, Our Knowledge of the External World, New York, The New American Library, 1960, p. 142.

pluralité d'un ensemble particulier[1]. Le nombre cardinal fini correspond à la pluralité d'un ensemble fini; le nombre cardinal transfini, à celle d'un ensemble infini. A chaque pluralité différente, finie ou infinie, correspond un nombre cardinal, fini ou transfini; selon qu'un ensemble renferme plus ou moins d'unités, les nombres cardinaux correspondants seront plus ou moins grands. En conséquence, les nombres cardinaux forment une suite ordonnée.

La question se pose donc de savoir comment évaluer et mesurer les ensembles infinis afin de classifier les nombres transfinis qui en révèlent la pluralité. Une suggestion se présente spontanément à l'esprit: pour évaluer un ensemble infini, dira-t-on, il suffit de compter ou énumérer les unités qui le composent. Ce processus suggéré est certes excellent en lui-même. Mais il a un défaut: celui de n'être utile que pour le fini et d'être tout à fait impraticable pour les ensembles infinis qui ne peuvent être ni parcourus ni franchis et, partant, ni évalués ni mesurés de cette façon. Mesurer en effet, c'est déterminer la quantité d'une chose, c'est assurer une connaissance non pas quelconque, mais très précise d'une quantité. Mesurer suppose la mise en oeuvre d'un processus de comparaison. Il est clair

---

[1] On songe naturellement ici à la distinction faite par S. Thomas entre _numerus numeratus_ et _numerus quo numeramus_. Ce dernier est, lui aussi, une pluralité mesurée par l'un, mais c'est une pluralité abstraite et qui sert à évaluer les autres pluralités. Cf. In IV _Phys._, lect. 17 et 19; _Ia_, q.30, a.1, ad 4.

que si pareil processus ne devait jamais aboutir à un terme, mais demeurer toujours en devenir, il ne saurait être question d'en tirer une connaissance déterminée: dans de telles conditions, la mensuration ne conduit à aucun résultat assuré, la mesure devient impossible. Et ainsi, on comprend sans peine que le processus itératif d'énumération ne saurait rien donner dans le cas des ensembles infinis.

Mais, devant la vanité de la tentative d'évaluer des ensembles infinis par voie énumérative, le mathématicien ne se tient pas pour vaincu. Il cherche une autre voie, une voie fructueuse. Cette voie, il la découvrira en analysant minutieusement la marche suivie dans l'évaluation des ensembles finis eux-mêmes.

Il faut tout d'abord reconnaître que notre façon d'évaluer un ensemble fini, i.e., de déterminer sa pluralité par énumération est un procédé qui n'a rien d'élémentaire ni de primitif. C'est au contraire, malgré les apparences, un procédé évolué et complexe. Il comporte en fait deux temps, deux étapes. Ces deux temps correspondent aux deux questions auxquelles il faut répondre devant un ensemble donné: (1) cet ensemble a-t-il ou non <u>même</u> pluralité qu'un autre ensemble dont la pluralité nous est déjà connue; (2) qu'elle est en fait <u>cette pluralité</u> qu'il partage avec un autre ensemble? Lorsqu'on a répondu à la première question, l'on n'est encore qu'à mi-chemin de la connaissance désirée: l'on sait que l'ensemble en cause possède <u>même pluralité</u> qu'un autre, mais il reste à savoir quelle est <u>cette</u>

pluralité.

Le procédé le plus primitif pour savoir si deux ensembles finis ont même pluralité, s'ils possèdent des éléments en quantité égale, si, en d'autres termes, ils ont même nombre cardinal, c'est de les comparer élément à élément. Deux exemples fort simples aideront à comprendre. Voici deux paniers remplis, l'un de pommes, l'autre de pêches. Peut-on, même sans savoir compter, découvrir s'il y a autant de pommes que de pêches? Assurément oui, et rien n'est plus simple. Il suffit de vider graduellement et simultanément les deux paniers en retirant une pomme de la main gauche, une pêche de la main droite. La répétition plus ou moins longue de cette opération aboutira à l'un ou à l'autre des résultats suivants: ou bien les deux paniers deviendront vides en même temps ou bien l'un sera vide avant l'autre. Dans le premier cas, on conclura qu'il y a autant de pommes que de pêches, que les deux ensembles ont même pluralité, qu'ils sont équivalents et qu'ils ont même nombre cardinal; dans l'autre cas, on les dira inégaux. En cas d'égalité, on saura exactement combien il y a de pommes si l'on sait déjà combien il y a de pêches et inversement. Mais, de soi, le procédé comparatif que nous avons décrit ne saurait fournir qu'une connaissance incomplète. Pourtant, si incomplète soit-elle, cette première connaissance est tout à fait indispensable.

Voici un autre exemple, encore plus simple que le précédent: il illustre le cas où l'on peut, d'un seul coup d'oeil et sans le moindre recours à une comparaison itérative, décider si deux ensembles sont équivalents ou non. Imaginons une salle contenant des fauteuils et où sont réunies des personnes. Si chaque fauteuil est occupé par une seule personne, si aucun fauteuil ne demeure inoccupé et aucune personne n'est debout, on sait immédiatement qu'il y a autant de fauteuils que de personnes. Sinon, les deux ensembles n'ont pas même pluralité.

Ce qui nous a permis de dire qu'il y a même pluralité, lorsque tel est le cas, c'est cette association un à un entre pommes et pêches, ou entre fauteuils et personnes. Dans son jargon technique, le mathématicien appelle pareille association une correspondance bi-univoque. Le qualificatif bi-univoque veut simplement dire: deux fois univoque, c'est-à-dire univoque dans un sens et univoque dans l'autre de telle sorte qu'à chaque élément du premier ensemble correspond un et un seul du second et, inversement, à chaque élément du second ensemble correspond un et un seul du premier. En pareil cas, le mathématicien estimera légitime de raisonner comme suit: il existe une correspondance bi-univoque entre deux ensembles, donc ces deux ensembles sont équivalents. Dire de deux ensembles qu'ils sont équivalents, cela signifie qu'ils possèdent une même pluralité d'éléments; et s'ils ont même pluralité, ils ont même nombre cardinal ou sont mesurés par un même nombre cardinal.

Mais pour savoir quelle est exactement la pluralité d'un ensemble proposé, il ne suffit pas de savoir qu'il a même pluralité qu'un autre à moins qu'on sache déjà la pluralité de ce dernier. L'évaluation des ensembles finis suppose donc une seconde étape, un deuxième temps que nous expliquons brièvement. Cette seconde étape réside essentiellement dans la construction d'une suite-modèle d'ensembles disposés et ordonnés selon une pluralité croissante. On y parvient en procédant ainsi. Prenons deux ensembles quelconques M et N et supposons qu'ils ne sont pas équivalents. Leur pluralité diffère donc par une ou plusieurs unités. Dans le premier cas, M et N seront des voisins immédiats dans la suite ordonnée en voie de construction. S'ils diffèrent par plus d'une unité, nous construirons ce segment de la suite qui viendra combler l'intervalle séparant M de N. On obtient ainsi:

$$\ldots\; M,\; M+1,\; M+2,\; M+3,\; \ldots\; N,\; \ldots$$

On peut facilement compléter la partie initiale de la suite en construisant de proche en proche tous les ensembles qui se succèdent à partir de l'unité jusqu'à M. On obtient alors:

$$1,\; 2,\; 3,\; 4,\; \ldots\; M,\; M+1,\; M+2,\; M+3,\; \ldots\; N,\; \ldots$$

De même on peut allonger la suite aussi loin qu'on veut en construisant les ensembles qui succèdent à N et qui diffèrent tous par une unité. On a alors:

$$1,\; 2,\; 3,\; 4,\; \ldots\; M,\; M+1,\; M+2,\; M+3,\; \ldots\; N,\; N+1,\; N+2,$$

Cette suite-modèle pourrait être faite d'objets concrets. On pourrait l'installer dans un musée. Chaque fois que quelqu'un voudrait évaluer un ensemble, il pourrait alors se rendre au musée et chercher à quelle ensemble de la suite-modèle correspond bi-univoquement l'ensemble dont il veut connaître la pluralité. Connaissant déjà les pluralités ordonnées des membres de la suite-modèle, la correspondance bi-univoque nous ferait connaître d'emblée la pluralité exacte de l'ensemble à évaluer. Tout cela est fort bien, mais on devine sans peine les inconvénients de cette méthode. Voilà pourquoi on a vite compris qu'il y aurait un immense avantage à substituer à cette suite concrète, une autre suite-modèle, une suite abstraite, celle-là, qu'on peut retenir de mémoire et qui peut ainsi nous accompagner sans cesse[1]. Quant on énumère, quand on dénombre un ensemble comme on a appris à le faire, que fait-on réellement? Pas autre chose qu'établir une correspondance bi-univoque entre l'ensemble à évaluer et les unités d'un des ensembles de la suite-modèle

---

[1] D'aucuns auront envie de sourire en lisant cette remarque. Elle n'est pourtant pas dénuée de fondement. Elle ne fait que reconnaître et exprimer une tendance spontanée de l'homme à choisir, comme étalons de mesure des longueurs, des membres et parties de son corps. Ces mesures qu'on appelle: le pouce, le pied, la coudée, la brasse ne proviennent-elles pas de ce qu'on se servait de ces membres corporels pour évaluer des longueurs? La mensuration effectuée à l'aide de pareils instruments corporels ne pouvait pas être rigoureuse bien entendu, mais ces instruments possédaient l'incontestable avantage d'être des instruments conjoints, i.e., toujours présents. Dans certaines peuplades primitives, on rencontre des suites-modèles d'évaluation des multitudes constituées par une série déterminée des parties du corps. Si pareil système de numération est fort limité, il jouit, lui aussi, de cette présence constante à l'évaluateur. Cf. Léon Brunschvicg, Les étapes de la philosophie mathématique, Paris, P.U.F., 1947, p. 10.

abstraite, i.e., celle des nombres naturels 1, 2, 3, ... La dernière unité de l'ensemble de la suite-modèle qu'on associe au dernier élément de l'ensemble à mesurer nous fournit une connaissance exacte de la pluralité d'un ensemble. Chacune de ces pluralités différentes constitue un nombre cardinal distinct. Et chaque nombre cardinal est représenté pas un symbole différent qui n'est pas le nombre lui-même, mais le signe de ce nombre, le symbole de cette pluralité.

Revenons maintenant aux ensembles infinis. Il s'agit pour nous de trouver un moyen de les évaluer, en supposant que ce soit là une entreprise possible. Dans sa transposition du fini à l'infini, le procédé énumératif d'évaluation perd toute validité. Mais si le processus n'est plus entièrement applicable, l'un de ses éléments composants peut être retenu, à condition d'être adapté à la situation nouvelle. L'élément à retenir, c'est la correspondance bi-univoque qu'il faudra tenter d'établir entre deux ensembles infinis pour savoir s'ils ont même pluralité. Il est manifeste qu'on ne peut espérer réaliser cette correspondance en considérant les éléments un à un. Mais si l'on réussit à découvrir une loi simple permettant d'exprimer, <u>d'un seul coup</u>, la correspondance bi-univoque, le but sera atteint: ce faisant, on remène le problème d'un niveau infini à un niveau fini où nous pouvons et savons nous mouvoir avec une relative aisance. Et si l'on réussit à bâtir cette correspondance bi-univoque, on conclura que les deux ensembles sont équivalents; ils auront ainsi même pluralité, ils auront un même nombre cardinal, mais, cette fois, un nombre cardinal <u>transfini</u>. Si l'on ne parvient pas à établir la correspondance requise, on conclura alors à la non-équivalence des deux ensembles, à leur différence de pluralité; ils auront des nombres transfinis différents. A chaque nombre transfini différent, on attachera un symbole distinctif tout comme on le fait pour les ensembles finis.

Introduisons maintenant le symbolisme approprié aux nombres transfinis. Nous nous donnons deux ensembles infinis M et N. Si l'on peut découvrir une correspondance bi-univoque entre eux, nous les dirons équivalents et nous écrirons

$$M \sim N.$$

Au point où nous en sommes, nous n'avons encore en notre possession aucun nombre transfini individuel. Nous désirerions pourtant, en supposant qu'il en existe, dénoter par quelque signe le nombre transfini d'un ensemble infini. Dès à présent nous pouvons le faire, mais la valeur déterminée de ce nombre nous restera inconnue à la manière des quantités algébriques représentées par des symboles littéraux. Une façon tout à fait appropriée de désigner symboliquement ce nombre transfini, c'est de procéder de la façon suivante. Soit un ensemble M. Nous signifierons son nombre cardinal par la même lettre $\bar{\bar{M}}$, mais surmontée de deux traits horizontaux qu'on pourrait interpréter comme indiquant la double abstraction de la nature et de l'ordre des éléments de l'ensemble dont le nombre cardinal représente la pluralité. Si donc nous avons deux ensembles M et N qui sont équivalents, on peut tirer cette conséquence:

$$M \sim N \longrightarrow \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

En d'autres termes, l'équivalence entre deux ensembles entraîne l'égalité des nombres cardinaux qui mesurent leurs pluralités. Qu'on se garde bien, ici, d'une méprise possible. Nous avons déjà noté que si l'égalité de deux ensembles entraîne leur équivalence, celle-ci en revanche n'entraîne pas l'égalité des deux ensembles, mais elle entraîne l'égalité des nombres cardinaux qui expriment et mesurent leur pluralité. En outre, tout ce qu'on peut conclure à partir de l'égalité de deux nombres cardinaux transfinis ou finis, c'est à l'équivalence des ensembles qu'ils mesurent, nullement à leur égalité.

Notre propos n'exige pas que nous connaissions les nombres transfinis pris individuellement. Il paraît pourtant difficile de n'en rien dire. Nous avons déjà appris que le nombre transfini constitue une extension du nombre cardinal fini. Nous savons également qu'on ne passe pas continûment du nombre fini au nombre transfini: ce n'est pas en prolongeant toujours la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, ... n, ..., en y ajoutant des nombres de plus en plus grands qu'on atteindra les nombres transfinis; il faut s'installer abruptement et d'un seul bond dans l'infini. Nous ne savons pas, pour l'instant, combien il y aura de nombres transfinis, ni même s'il y en aura un seul. S'il en existe, il faudra qu'il y en ait au moins un. S'il n'y en a pas d'autre, cet unique nombre transfini sera à la fois le plus petit et le plus grand. S'il y en a plus qu'un, il y en aura un qui sera plus petit que les autres et il servira à mesurer ces derniers: ce sera, pour ainsi dire, l'un transfini, analogue à l'un du domaine fini. Arrêtons-nous donc un peu à ce nombre transfini, unique ou premier.

Sur quoi l'existence de ce nombre transfini pourra-t-elle s'établir? Le nombre cardinal, qu'il soit fini ou qu'il soit transfini, exprime la pluralité d'un ensemble, fini ou infini. Le premier nombre transfini devra donc se rattacher à un ensemble infini. Or existe-t-il des ensembles infinis? S'il fallait rattacher les nombres transfinis à l'existence de multitudes ou collections infinies actuelles, le mathématicien serait dans une impasse. Nous ne savons pas en effet s'il existe effectivement des multitudes infinies en acte. Et même s'il en existe, comment pourrions-nous en être sûrs? Un des plus farouches partisans et défenseurs de la théorie cantorienne, le professeur Abraham E. Fraenkel de l'Université de Jérusalem, reconnaît sans ambages que l'univers physique, dans l'état actuel de nos connaissances, ne nous fournit aucun exemple de pareils ensembles.

> As a matter of fact, the recent research in physics has in increasing measure convinced us that the exploration of nature cannot lead to either infinitely large or infinitely small magnitudes. The assumption of a finite extent of the physical space, as well as the assumption of an only finite divisibility of matter and energy (so small that the smallest

> particles of matter and energy are finite), completely harmonize with experience. It thus seems that the external world can afford us nothing but finite sets[1].

C'est le domaine des nombres qui fournira la pièce justificative du premier nombre cardinal transfini. Nous sommes familiers avec les nombres naturels ou entiers positifs: ils forment une suite ordonnée par valeurs croissantes. Cette suite possède un tout premier terme, mais on ne peut lui en assigner un dernier: c'est une suite ouverte, sans bornes, illimitée, infinie. C'est à cet ensemble que Cantor va attacher le premier nombre transfini; c'est cet ensemble, pris dans sa totalité, qu'il considère comme la première pluralité infinie. Et pour représenter et symboliser cette pluralité, ce nombre, on utilise habituellement, à l'instar de Cantor lui-même[2], la première lettre de l'alphabet hébraïque et zéro: $\aleph_0$, c'est-à-dire <u>aleph-zéro</u>. Ajoutons qu'on connaît un second nombre transfini: il correspond à la pluralité des nombres réels et c'est <u>aleph</u> $\aleph$. On ignore s'il existe un ou plusieurs nombres transfinis entre <u>aleph-zéro</u> et <u>aleph</u>, mais on soutient qu'il existe une infinité de nombres transfinis supérieurs à <u>aleph</u>.

---

1 Fraenkel, <u>Abstrat Set</u>..., p. 9.

2 Cantor, <u>Contributions to the Founding</u>..., p. 104.