CHAPITRE UNIQUE

CONSIDERATIONS FINALES

L'exposé qui précède nous a mis en face de deux enseignements relatifs à l'infini: celui d'Aristote et de S. Thomas d'Aquin d'une part et celui des cantoriens d'autre part. Parce qu'elle s'impose avec une évidence particulière, on n'aura sûrement pas manqué de faire la constatation générale que ces deux enseignements ne sont pas en parfaite harmonie. Il serait assurément exagéré de dire qu'ils sont en plein désaccord et sur tous les points, mais ils entrent en conflit sur quelques points parmi lesquels certains revêtent, aux yeux d'un aristotélicien et d'un scolastique au moins, une importance primordiale. Ces points en litige ont besoin d'être examinés de près, remis dans leur lumière propre, discutés; les raisons sur lesquelles s'appuient les positions antagonistes doivent être évaluées et jugées.

Dans un domaine aussi délicat, il y a danger de simplifier les choses un peu trop. Pareille simplification n'est pas toujours exempte d'inexactitude ni d'injustice. Bertrand Russell n'a pas, croyons-nous, échappé à ce danger lorsqu'il écrivit:

> A long line of philosophers, from Zeno to M. Bergson, have based much of their metaphysics upon the supposed impossibility of infinite collections. Broadly speaking, the difficulties were started by Zeno, and nothing material was added until we reach Bolzano's Paradoxien des Unendlichen, a little work written in 1847-48, and published posthumously in 1851. Intervening attempts to deal with the problem are futile and negligible. The definite solution of difficulties is due, not to Bolzano, but to Georg Cantor, whose work on this subject first appeared in 1882[1].

On s'étonne à bon droit d'un pareil verdict; on se demande si une simplification aussi outrée, un jugement aussi peu nuancé est dicté par le parti-pris ou par l'ignorance. Heureusement, rien ne nous force à souscrire aux vues de Russell. Ses énoncés dogmatiques ne rencontrent pas partout, du reste, des croyants, même dans le monde des mathématiciens. En effet, Hilbert, ce mathématicien dont le renom et l'autorité ne le cèdent en rien à ceux de Russell s'est cru autorisé à déclarer dans Über das Unendliche:

> The infinite, like no other problem, has always deeply moved the soul of men. The infinite,

[1] Our Knowledge of the External World, New York, The New American Library, A Mentor Book, p. 130. Cette vue de la question n'est pas, chez Russell, le résultat d'une distraction. On retrouve la même inspiration et la même simplification dans cet autre passage: "Hence many of the topics which used to be placed among the great mysteries -for example, the natures of infinity, of continuity, of space, time and motion- are now no longer in any degree open to doubt or discussion. Those who wish to know the nature of these things need only read the works of such men as Peano or Georg Cantor; they will find exact and indubitable expositions of all these quondam mysteries". (Mysticism and Logic, London, George Allen and Unwin, p. 80.)

> like no other idea, has had a stimulating and fertile influence upon the mind. But the infinite is also more than any other concept, in need of clarification[1].

Cette situation, issue d'un désaccord entre deux mathématiciens célèbres et dont l'autorité est universellement reconnue, a valeur de signe. Elle montre que la question de l'infini est abstruse et qu'elle n'a pas encore été lavée de toute obscurité. Nous devons donc en poursuivre attentivement l'examen.

Dans les pages qui précèdent, maintes divergences de vue ont été mises à nu. Des appréciations globales ont été faites, des jugements sommaires et des condamnations absolues ont été portés par les cantoriens à l'endroit de leurs opposants. Le caractère sommaire, absolu, sans nuances de ces déclarations les rend suspectes et fait spontanément naître le désir, voire le besoin, d'examiner la situation de plus près. Et si elles ne sont pas nécessairement ni exclusivement dirigées contre l'enseignement aristotélicien ou scolastique, il n'empêche que celui-ci est touché et concerné. Comme, sur certains points, les jugements cantoriens mettent en cause des données et des notions jugées d'une importance primordiale pour et dans l'enseignement aristotélicien et thomiste, il importe de mettre en question, dans et pour cet enseignement, le bien-fondé de ces jugements.

---

[1] Cité par Hermann Weyl dans Philosophy of Mathematics and Natural Science, éd. rev. et aug., trad. angl. de Olaf Helmer, Princeton, Prin. Univ. Press, 1949, p. 66.

Les principaux points à débattre ou à éclairer regardent l'infini en acte, l'énoncé <u>totum est majus sua parte</u> et l'antériorité, l'un par rapport à l'autre, du fini et de l'infini.

A) <u>L'INFINI EN ACTE</u>

L'un des premiers chapitres de cette étude a rappelé, à grands traits, les propos tenus par les premiers philosophes de la Grèce sur l'infini. Depuis lors cette question de l'infini n'a jamais cessé d'être débattue. De tout temps en effet la possibilité de l'infini en acte a été envisagée. Il est historiquement incontestable que le sentiment commun s'est avéré défavorable à l'infini en acte. Et ce sentiment commun s'est traduit dans l'énoncé <u>Infinitum actu non datur</u>. Mais c'est par trop simplifier les choses que de n'y voir rien d'autre qu'un "décret" arbitrairement proféré par les philosophes, comme semble le suggérer Hausdorff[1]. Fraenkel, pour sa part, s'il rend hommage à la philosophie et à la théologie scolastiques parce qu'elles font montre d'audace en traitant des questions délicates envisagées ici selon des voies "similar to some trains of thought in the abstract theory of sets"[2], range Aristote parmi les adversaires principaux de l'infini en acte et des théories cantoriennes[3]. La situation n'est pourtant pas si simple. Voilà pourquoi il est nécessaire d'y revenir un peu.

---

1 <u>Mengenlehre</u>, p. 11.

2 Fraenkel, <u>Abstract Set</u>..., p. 3, note 1.

3 <u>Ibid</u>., p. 2.

Nous avons déjà vu quel est l'enseignement d'Aristote sur l'infini et quelle en est la portée restreinte. Aristote a explicitement soutenu qu'il n'existe pas d'infini en acte dans le monde sensible, ni selon la grandeur ni selon la multitude; il est toutefois favorable à l'éternité du monde et du temps. Rien n'autorise qui que ce soit à conclure de là qu'Aristote est contre l'infini en acte en dehors de l'univers physique. Du reste, on ne peut dire non plus qu'il favorise un tel infini hors du monde sensible et matériel. A la vérité, Aristote ne s'est jamais prononcé sur la possibilité d'une multitude infinie en acte de nature proprement mathématique. Il n'a jamais posé la question de l'infini sur le plan de la quantité comme telle, de la quantité abstraite, non plus que sur le plan de l'immatériel, du pur intelligible. Et cela, il le déclare en termes exprès, comme nous l'avons déjà signalé[1]. Dans son commentaire sur ce passage de la <u>Physique</u> d'Aristote, S. Thomas d'Aquin souligne cet aveu du Stagirite touchant le point de vue restreint de son traité sur l'infini. Et, dans sa <u>Summa contra Gentiles</u>, S. Thomas ajoute une autre observation. Pour les tenants de l'éternité du monde et de la présence dans ce monde 'depuis le début' d'âmes immortelles, le problème se pose de savoir s'il n'existe pas une multitude infinie en acte d'âmes humaines. Après avoir rapporté diverses opinions, notamment celles d'Avicenne, d'Averroès et d'Algazelis, S. Thomas poursuit ainsi:

---

[1] <u>Phys.</u>, III, c.5, 205b; S. Thomas, In III <u>Phys.</u>, lect. 7.

> Quid autem Aristotelem senserit, ab eo expresse non invenitur: cum tamen expresse mundi aeternitatem ponat. Ultima tamen praedictarum opinionum (nempe Avicennae et Algazelis) principiis ab eo positis non repugnat. Nam in III *Phys.* (V, 13 sqq.; 205a) et in I *Caeli et Mundi* (V sqq.; 271b), probat non esse infinitum actu in corporibus naturalibus, non autem in substantiis immaterialibus[1].

Pour apprécier davantage ce passage, il faut connaître la position d'Avicenne et d'Algazelis. Ils admettaient l'existence simultanée d'une multitude infinie en acte d'âmes humaines parce que, pour eux, il s'agit là d'une multitude *per accidens*, c'est-à-dire d'une multitude où les membres, les unités sont indépendants l'un de l'autre, par opposition à la multitude *per se* dont les membres sont subordonnés l'un à l'autre et forment une chaîne causale. Même si S. Thomas ne favorise pas cette opinion, mais plutôt celle d'Averroès qui rejette toute multitude infinie en acte qu'elle soit *per se* ou *per accidens*, il reconnaît, dans ce passage, que la position susdite ne peut être rejetée en invoquant les principes posés par Aristote.

Le Docteur Angélique, nous le savons, a carrément abordé et posé la question de la multitude infinie en acte. On sait quelle est sa position: s'il est, en définitive, défavorable à l'infini en acte, il serait toutefois inexact de voir en lui un adversaire irréductible d'une multitude infinie actuelle. S'il estime improbable la possibilité de l'infini en acte à propos

---

[1] II *C.G.*, c. 81.

des multitudes, personne, à son avis, n'a encore prouvé son impossibilité. S. Thomas, on l'a noté déjà, discute ce problème dans un contexte théologique. Les arguments qu'il invoque contre l'infini, en particulier dans la Somme Théologique, sont l'un, de caractère théologique, l'autre, de caractère dialectique. Le premier tend à établir, à titre de fait, la non-existence d'une multitude infinie. Le second, s'il regarde plutôt la possibilité d'une telle multitude n'est pas démonstratif et, partant, ne clôt pas le débat ou la recherche. Or, si une multitude infinie en acte est impossible à titre même de multitude, d'où cette impossibilité peut-elle venir? Il faudrait, semble-t-il, qu'elle provienne de l'une ou l'autre des deux sources suivantes: de la multitude elle-même ou des éléments qui la composent. Or la multitude comme telle est quelque chose de possible puisqu'il en existe, notamment les multitudes finies. D'autre part, on ne voit pas non plus comment l'impossibilité de la multitude infinie pourrait provenir de l'une ou l'autre unité la composant puisque ces unités sont possibles. Il n'est donc pas facile de voir ce qui rend impossible la multitude infinie en acte. Ne serait-ce pas pour une raison de cette sorte que S. Thomas n'a jamais totalement rejeté la multitude infinie en acte?

Il faut en outre rappeler que S. Thomas pose explicitement l'infini en acte à propos de Dieu qui ne connaît aucune limitation à sa perfection, bien qu'il s'agisse là d'un infini par nature bien différent de celui autour duquel se situe la discussion. Mais il n'en demeure pas moins que, de cette manière au moins, le Docteur Angélique pose un infini en acte.

C'est donc simplifier dangereusement les choses que de dire sans la moindre distinction, sans la moindre nuance ou réserve que, d'après les philosophes péripatéticiens et scolastiques, infinitum actu non datur.

La question de l'infini actuel est capitale dans la théorie cantorienne. Aussi certains cantoriens, tel Fraenkel, éprouveront-ils le besoin de justifier cet infini. Quoi de plus naturel. Pour sa part, Fraenkel propose un mode déterminé de justification. Et c'est ce mode que nous voudrions maintenant évaluer.

Comme nous l'avons noté auparavant, le monde physique ne lui fournit pas la justification qu'il cherche, car, d'après lui, ce monde ne renferme aucun ensemble infini en acte. Il est ainsi forcé de la chercher ailleurs. Or il la découvre dans le pouvoir quasi magique que possède notre intelligence de produire ou créer un ensemble infini actuel, et cela, dans "a simultaneous act of thinking". Ne chicanons pas Fraenkel sur la justesse de l'expression d' "acte simultané de pensée", car, ce qu'il entend probablement signifier c'est que par et dans un seul acte de pensée, nous avons le mystérieux pouvoir de créer et de faire naître un ensemble infini actuel d'entités telles qu'elles seraient bien déterminées et toutes données dans leur singularité propre et autonome.

Je suis, pour ma part, profondément reconnaissant à Fraenkel de m'avoir révélé l'existence, en moi, d'un si précieux pouvoir. Mais j'aurais également fort apprécié qu'il me donnât en même temps la recette pour l'utiliser efficacement. Car j'ai beau essayer de créer un ensemble infini actuel d'entités idéales, je n'y parviens pas. Je puis aisément former le concept de nombre naturel. Je puis tout aussi aisément forger un nom unique pour le désigner. Mais, ce faisant, je ne pose aucunement une infinité de nombres naturels dans ce que chacun possède de propre et de singulier. Dans un seul et même concept universel, dans un nom unique, j'atteins tous les nombres individuels possibles, mais seulement dans ce qu'ils ont en commun et en quoi ils sont confondus, je ne les atteins pas dans ce que chacun a de propre et de particulier. Pour cela, il me faudrait poser autant d'actes distincts qu'il y a de nombres particuliers. Atteindre une infinité d'individus dans une notion universelle est chose concevable, voire courante, mais ce serait se méprendre gravement que d'y voir la création d'un infini actuel dans la détermination même de tous et chacun de ses éléments[1].

---

[1] Cf. S. Thomas, De Ver., q.2, a.9, c.: "Et quia una forma universalis nata est ab infinitis singularibus participari, inde est quod intellectus noster quodammodo infinita cognoscit. Sed quia illa similitudo quae est in intellectu, non ducit in cognitionem singularium quantum ad ea quibus singularia ad invicem distinguuntur, sed solum quantum ad naturam communem; inde est quod intelliguntur per speciem quam habet apud se".

B) TOTUM MAJUS SUA PARTE

C'est principalement autour de cet énoncé qu'éclatent et se concrétisent les divergences de vue entre péripatéticiens et cantoriens. Les premiers y voient un énoncé évident pour tous; en outre, ils ne croient pas devoir apporter la moindre restriction à l'universelle validité de cette proposition et, en fait, n'en font aucune de façon expresse. Les cantoriens, eux, font une distinction: valable pour le fini, l'énoncé, à leurs yeux, ne l'est plus pour l'infini. Et, ipso facto, ils accusent tacitement leurs opposants d'erreur partielle.

L'opposition ne fait que se préciser et se manifester davantage lorsqu'on examine l'exemple particulier dont se servent souvent les cantoriens pour illustrer leur position. Parce qu'il existe une correspondance bi-univoque entre les nombres naturels et les seuls nombres pairs, ils concluent à l'équivalence des deux ensembles et, de là, à l'égalité du tout et de sa partie propre puisque les nombres naturels forment un tout dont les nombres pairs constituent une partie propre. S. Thomas est d'un autre avis: à deux reprises, il affirme expressément qu'il y a plus de nombres pairs et impairs réunis qu'il y a de nombres pairs seuls.

> Et hoc etiam videmus in numeris accidere; nam species numerorum parium sunt infinitae, et similiter species numerorum imparium; et tamen numeri pares et impares sunt plures quam pares[1].

---

[1] IIIa, q.10, a.3, ad 3.

> Sicut numeri pares sunt infiniti; et tamen numeri pares et impares simul accepti sunt plures numeris paribus[1].

Pour que l'exposé de la question que nous sommes en train de débattre ait quelque chance d'être clair et efficace, nous devrons le sectionner et procéder avec ordre. Nous discuterons donc d'abord la position cantorienne et ensuite celle de S. Thomas qui représente à la fois, et fort bien, celle de tous les aristotéliciens et scolastiques.

Cantor et les siens fondent toute leur théorie de l'équivalence des ensembles sur la correspondance bi-univoque: leurs éléments respectifs se correspondent-ils bi-univoquement, ils sont équivalents et, partant, ont même nombre cardinal; s'ils ne se correspondent pas de cette façon, ils ne sont pas équivalents. Qu'il s'agisse d'ensembles finis ou d'ensembles infinis, on verra dans la correspondance bi-univoque la preuve, ou au moins le critère, de l'équivalence des ensembles.

Que l'existence d'une telle correspondance garantisse l'équivalence de deux ensembles finis, nous n'éprouvons aucune difficulté à l'accepter, et notre processus habituel d'énumération n'est rien d'autre qu'une mise en correspondance bi-univoque, comme nous l'avons montré dans un chapitre précédent. Mais qu'est-ce qui nous garantit que l'existence d'une correspondance bi-univoque entraîne nécessairement l'équivalence de deux ensembles infinis? Pareillement, l'absence de correspondance bi-univoque entre deux ensembles finis implique leur non-équivalence; et il semble tout à

---

[1] _Quodl._, IX, q.1, a.1, ad 1.

fait vraisemblable d'en dire autant de deux ensembles infinis. Par où il apparait que l'absence de correspondance bi-univoque permet de conclure universellement à la non-équivalence de deux ensembles; par contre, la présence, entre deux ensembles, d'une correspondance bi-univoque n'assure l'équivalence que s'il s'agit d'ensembles finis.

Ce qui suggère cette conclusion, c'est la différence suivante entre les ensembles finis et les ensembles infinis. Entre deux ensembles finis, dès qu'il existe une correspondance bi-univoque, il en existe un nombre déterminé d'autres. Pour fixer les idées, examinons un exemple très simple, celui des deux ensembles (1, 2, 3) et (a, b, c). Le tableau suivant nous fournit autant de façons différentes d'établir une correspondance bi-univoque:

a	b	c	
1	2	3	1ère correspondance
1	3	2	2e . . .
2	1	3	3e . . .
2	3	1	4e . . .
3	1	2	5e . . .
3	2	1	6e . . .

Nous avons là autant de correspondances bi-univoques différentes. Dans cet exemple particulier, nous en trouvons six. Or le nombre de ces possibilités n'est pas indépendant du nombre des éléments contenus dans chaque ensemble. Nous constatons qu'à la première lettre 'a', nous pouvons associer l'un ou l'autre des trois chiffres du second ensemble. Comme ils sont au nombre de trois, il s'ensuit qu'il existe trois possibilités, trois choix d'association avec la première lettre. Mais, une fois choisi le chiffre associé à la première lettre 'a', il ne reste plus que deux chiffres qui peuvent être associés à la seconde lettre 'b': donc deux possibilités, deux choix possibles. Enfin, une fois déterminé le chiffre devant correspondre à la lettre 'b', il ne reste plus qu'une possibilité pour la troisième lettre 'c': le troisième et dernier chiffre doit lui correspondre. Nous avons ainsi trois choix pour la première lettre, deux pour la seconde, un seul pour la troisième. On a donc le résultat suivant:

Nombre d'associations possibles: $= 3.2.1 = 3!$ (factorielle 3)

Si nos deux ensembles avaient quatre éléments au lieu de trois, il existerait $4.3.2.1 = 24 = 4!$ façons distinctes d'établir la correspondance bi-univoque. S'il s'agissait d'ensembles composés de n éléments, les possibilités de correspondance bi-univoque différentes seraient au nombre de $n! = 1.2.3.4 \ldots (n-1).n$.

Mais la situation est tout autre lorsqu'il s'agit des ensembles infinis. Le cantorien se satisfait alors d'une seule et unique correspondance bi-univoque. Voilà qui est étonnant. Car, puisque la pluralité des éléments qui composent deux ensembles infinis est sans mesure, on pourrait s'attendre à ce que les possibilités de correspondance bi-univoque soient elles-mêmes innombrables. Le sont-elles réellement, il paraît bien difficile de le savoir. Une chose est cependant assurée, c'est qu'on ne voit pas très bien comment, même dans le cas élémentaire de l'ensemble des nombres naturels et de celui des nombres pairs seuls, on pourrait établir facilement une multitude d'associations bi-univoques entre leurs éléments.

S'il n'y a pas mille façons d'établir une correspondance bi-univoque entre deux ensembles infinis, on peut, avec un même esprit interrogateur, envisager un cas extrême et se demander comment il se fait qu'on puisse, parfois, en établir même une seule. Songeons en particulier au cas classique des nombres naturels et de leurs carrés. Comment se fait-il que semblable association puisse être établie entre eux? Vue sous un certain angle, cette correspondance n'a rien qui étonne, mais, sous un autre angle, elle surprend. On admettra volontiers que chaque nombre naturel ait, pour lui correspondre, son carré. Quel que soit le nombre naturel donné, si grand soit-il, on trouvera, dans l'ensemble des nombres carrés, celui qui lui correspond; il suffit, pour découvrir ce correspondant désiré, d'aller assez loin dans la série des carrés. Le malaise naît lorsqu'on pense que les carrés ne sont qu'une infime partie propre des nombres naturels; on ne voit plus alors très bien comment une correspondance bi-univoque puisse demeurer possible. Il faut dès lors bien voir où est la source de cette possibilité: c'est que les deux séries sont ouvertes, aussi bien celle des nombres naturels que celle des carrés de ces nombres naturels. Toutes deux sont en effet des suites qui ne possèdent pas de dernier terme: c'est en ce sens qu'on peut les dire 'ouvertes', c'est-à-dire ouvertes à l'addition indéfinie d'un élément nouveau et supérieur. C'est précisément cette caractéristique des deux ensembles qui rend possible, entre eux, une correspondance bi-univoque bien que l'ensemble des carrés apparaisse comme un infime sous-ensemble des nombres naturels.

Un autre aspect de la position cantorienne requiert un examen critique: c'est celui de l'égalité du tout et de sa partie. Analysons tout d'abord le cas classique dont on se sert pour illustrer la situation: celui des nombres naturels et celui des nombres pairs entre lesquels on pose une correspondance bi-univoque:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots \quad n, \quad \ldots$$

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad \ldots \quad 2n, \quad \ldots$$

Le premier ensemble, dit-on, fait figure de tout par rapport au second: la première suite est composée et des nombres impairs et des nombres pairs, la seconde ne renferme que les nombres pairs: elle n'est donc, conclut-on, qu'une partie de la première suite.

A ce sujet, une première remarque s'impose. Elle prend la forme de la question suivante: peut-on vraiment parler de 'tout' à propos de la suite des nombres naturels? Nous devons donc nous arrêter à la notion de tout et à l'usage qu'on fait du terme. Nous l'avons déjà fait, mais il importe d'y revenir. Prise dans son sens propre et strict, la notion de tout réfère au tout intégral, c'est-à-dire au tout qui résulte de la réunion des parties qui le composent. En ce sens, il n'y a vraiment et proprement de tout que là où il y a achèvement, état complet, perfection, que lorsque toutes les parties composantes sont données, posées, acquises. Tant et aussi longtemps que la dernière partie n'est pas apposée, il n'y a pas encore de tout si on prend le terme dans son sens strict et propre. Par conséquent, comme la suite des nombres naturels n'est jamais posée et ne peut jamais l'être, on ne peut pas vraiment parler de tout à leur sujet. Il n'est pas approprié de dire des nombres naturels qu'ils forment un tout, une totalité; ils ont beaucoup plus raison de partie que de tout, comme le souligne Aristote.

On ne manquera pas de soulever ici une objection. On rappellera que, très souvent, on emploie l'expression 'tous les nombres naturels' comme on dit 'tous les hommes'; pourtant, les nombres naturels ne sont pas tous donnés à la fois. Cette expression n'est pas fautive; elle est correcte et justifiable. Mais elle ne détruit ni même n'entame en rien la validité de notre propos antérieur. Voyons comment il peut en être ainsi.

Notons d'abord que, dans les expressions susdites et autres semblables, le terme 'tous' peut comporter un sens distributif ou un sens collectif. Dans le premier cas, il est synonyme de 'chacun' et correspond au terme latin omnis. Ainsi lorsqu'on dit 'tous les hommes sont mortels' le prédicat affecte, non pas la collectivité des hommes en tant que telle, mais chaque homme de cette collectivité; la propriété d'être mortel est 'distribuée'. Ce sens et cet usage du terme 'tous', s'il est peut-être le plus fréquemment usité, n'est pas celui dont il s'agit dans le problème à l'étude.

Mais le terme 'tous' dans les expressions semblables à celles que nous avons mentionnées plus haut peut référer directement à l'ensemble des individus réunis et non plus à chacun des éléments de la collectivité. Si je dis: 'tous les hommes forment une immense société', le prédicat ne peut valoir que pour la collectivité des hommes, non pour chacun pris individuellement. De même si je dis: "tous les nombres naturels composent un ensemble infini et dense', j'exprime des propriétés qui ne valent que pour l'ensemble. Ce qu'il faut bien voir ici, c'est que ces expressions valent même si tous les hommes possibles ou tous les nombres naturels possibles ne sont pas donnés en acte. En d'autres termes, pareil usage du terme 'tous' ne pose pas nécessairement l'existence d'un tout au sens plein et fort; la collectivité impliquée par ces expressions peut être achevée ou non, complète ou non sans que la validité de l'énoncé cesse pour autant. Le vrai sens du terme 'tout' entendu strictement, est exposé par S. Thomas dans le passage suivant:

> Totum vero significat collectionem partium in aliquo uno: et ideo in illis _proprie_ dicitur totum in quibus, _ex omnibus partibus acceptis simul_, fit _unum perfectum_, cujus perfectio nulli partium competit, sicut domus et animal[1].

La collection des nombres naturels ne satisfait pas aux strictes exigences de la notion de tout, parce que cette collection n'est jamais parachevée ni parfaite. On peut donc dire très justement, en dépit de l'aspect paradoxal de l'énoncé, que tous les nombres naturels ne forment pas un tout.

Donc, à proprement parler, il est impossible de dire de la suite des nombres naturels qu'elle est un tout. Et, s'il en est bien ainsi, on ne pourra voir dans les nombres naturels, d'une part, et, d'autre part, les nombres pairs, un cas récalcitrant à la validité de l'énoncé _totum majus sua parte_, car, dans cet énoncé, il s'agit d'un tout intégral et de sa partie intégrante.

Il faut dire plus. Supposons pour un instant qu'on puisse vraiment considérer les nombres naturels comme un tout authentique. Ne devrait-on pas alors accorder aussi que les seuls nombres pairs de la seconde suite forment également un tout, un tout moins vaste que le premier sans doute, mais un tout quand même. Dans ces conditions, on ne peut aucunement relier les deux par l'énoncé du _tout plus grand que sa partie_, puisque, maintenant, il n'est plus question de partie, mais uniquement

---

[1] In V _Metaph._, lect. 21, n. 1108.

de touts, alors que plus haut on notait qu'il fallait considérer les deux ensembles proposés non pas comme des touts, mais comme des ensembles ayant plutôt raison de parties.

Allons plus loin. Accordons provisoirement aux cantoriens que la suite des nombres naturels forme un tout. Par ailleurs, nous devons être d'accord avec eux pour reconnaître que les nombres pairs constituent une partie intégrante des nombres naturels. Maintenant, considérons les deux suites entre lesquelles on a établi une correspondance bi-univoque:

1, <u>2</u>, 3, <u>4</u>, 5, ... n, ... (N)

2, 4, 6, 8, 10, ... 2n, ... (P)

En vertu de la correspondance bi-univoque qu'ils établissent entre les deux suites, les cantoriens concluent à l'équivalence des deux ensembles et, par surcroît, à l'égalité du tout et de sa partie. Or cette conclusion ne paraît pas valide. En effet, pour quels ensembles cette correspondance vaut-elle sinon pour les éléments de (N) et ceux de (P)? La suite (P) renferme les nombres pairs. Mais ces nombres pairs font-ils partie de la suite (N). Manifestement non; les nombres pairs qui sont parties constitutives, intégrantes de la séquence (N), ce sont les nombres pairs soulignés dans (N). Il est tout à fait inexact de considérer les suites (N) et (P) comme un tout intégral et sa partie intégrante. La séquence (P) n'est aucunement une partie intégrante de (N), elle est autonome et indépendante. Il est tout à fait faux de partir de là pour conclure à l'égalité du tout et de sa partie, pour nulle autre raison qu'on n'a pas, là, affaire à un tout et à sa partie, mais à deux entités indépendantes du point de vue de leur composition.

Nul doute que les cantoriens ne cèderont pas facilement à cette dernière raison. Ils voudront probablement rétorquer et dire que nous ne devons pas considérer les chiffres matériellement, mais formellement, c'est-à-dire selon leur signification. Il est bien entendu que le symbole 2 de la suite (N) n'est aucunement différent de la marque 2 de la suite (P) si l'on s'en tient à l'aspect formel du chiffre: l'un et l'autre signifient une seule et même chose. Mais il n'en demeure pas moins que ce sont deux marques, deux dessins; même s'ils possèdent même signification, même s'ils ont même configuration, ce sont deux marques dont l'une n'est pas l'autre. Mais considérons, pour un instant, la seule signification des symboles: cela veut dire, d'après la théorie des ensembles, que

$$N + P = N.$$

L'ensemble (P) des nombres pairs est ainsi absorbé par l'ensemble (N) qui renferme les nombres impairs et les nombres pairs comme parties intégrantes. Tout va bien jusqu'ici. Mais la situation commence à se détériorer à partir du moment où l'on tente d'établir une correspondance bi-univoque entre les nombres pairs et impairs de (N) d'une part et, d'autre part, les seuls nombres pairs du même ensemble (N), i.e., ces nombres pairs qui sont vraiment partie intégrante de (N). On est alors forcé de reconnaître que la correspondance bi-univoque n'est plus possible. Par exemple, prenons le cas particulier du nombre 2. En vertu de la correspondance directe, 2 correspond à 4, mais, en vertu de la correspondance inverse, ce même 2 doit correspondre à 1. Il n'y a donc plus de correspondance bi-univoque. Et l'absence de cette correspondance entraîne l'invalidité des conséquences qui lui sont associées, en particulier, celle qui est relative à l'égalité du tout et de sa partie dans le domaine de l'infini.

Revenons maintenant à S. Thomas qui, avec Aristote et bien d'autres scolastiques, aurait eu le tort de ne pas spécifier les conditions restreignant au fini le domaine où l'énoncé _totum est majus sua parte_ est valide.

La réponse à cette objection est des plus simples. Il faut dire tout d'abord que, pour S. Thomas et les autres, l'énoncé ne s'applique pas à l'infini. Il y a plus cependant. S. Thomas en effet n'avait aucun besoin de formuler expressément des conditions restrictives pour limiter au fini la validité de l'énoncé. Quand on connaît bien son enseignement, quand on sait comment il utilise les différents sens des mots et l'ordre de priorité entre ces sens, on sait tout de suite que l'énoncé n'est valide que pour le fini. Cet énoncé, nous le savons, est tenu par Aristote et S. Thomas comme non seulement évident en soi, mais encore évident pour tous. De tels énoncés se composent des termes les plus communs et les plus connus: on en acquiert la connaissance immédiate à partir d'un seul cas, d'une seule réalisation. Le tout intégral d'ordre quantitatif est celui d'où est tiré cette notion primitive et manifeste de 'tout' et il en va de même pour celle de 'partie' qui lui est corrélative. Il ne s'agit aucunement, dans l'énoncé en cause, de tout universel ni de tout potentiel. S'il s'agissait du tout universel, nous serions en face d'une situation nettement paradoxale. Nous savons en effet que le genre est un tout universel par rapport aux espèces qui sont sous lui; à ce point de vue, il déborde chacune des espèces, il est plus 'grand' qu'elles. Rien n'empêche pourtant qu'à un autre point de vue il entre comme partie constitutive de l'espèce puisque celle-ci est composée du genre et de la différence spécifique: alors, l'espèce est plus 'grande' que le genre.

Parce que l'énoncé <u>totum majus sua parte</u> vaut strictement pour le seul tout intégral et que, d'autre part, l'infini n'est pas un tout intégral parce qu'il n'est jamais achevé, il devient évident que S. Thomas n'avait aucune spécification restrictive à formuler. Pour qui connaît son enseignement, il est clair que l'infini n'entre pas dans la signification du tout, du tout intégral.

C) <u>R A P P O R T D U F I N I E T D E L ' I N F I N I</u>

Le troisième point qui fonde l'opposition entre cantoriens et aristotéliciens scolastiques, c'est la question de l'antériorité, au point de vue de notre connaissance, du fini sur l'infini ou de l'infini sur le fini.

La théorie cantorienne a conduit à poser l'infini comme antérieur au fini. En définissant un ensemble infini comme celui qui équivaut à l'une de ses parties propres et l'ensemble fini comme celui qui n'est pas tel, on affirme, indirectement et implicitement, que l'infini est connu d'abord et que, par opposition, on connaît ensuite le fini. Cette position rejoint celle de Descartes qui écrivait dans une lettre à Clerselier:

> Or je dis que la notion que j'ai de l'infini est en moi avant celle du fini, pource que, de cela seul que je conçois l'être ou ce qui est, sans penser s'il est fini ou infini, c'est l'être infini que je conçois; mais, afin que je puisse concevoir un être fini, il faut que je retranche quelque chose de cette notion générale de l'être, laquelle par conséquent doit précéder[1].

Cette position est manifestement contraire à l'enseignement aristotélicien et scolastique. Dans cet enseignement, notre connaissance prend son point de départ dans le monde des sens qui ne nous révèlent que des entités finies. Selon la voie naturelle de notre connaissance, nous atteignons l'infini dans une opposition, négative ou privative, au fini. La négation ou la privation n'est jamais que la négation ou la privation de quelque

---

Descartes, Oeuvres de Descartes, publiées par Charles Adam et Paul Tannery, Correspondance, t.V, Paris, Vrin, s.d., p. 356. Voir aussi: Méditations, III: "Puisque au contraire, je vois manifestement qu'il se rencontre plus de réalité dans la substance infinie que dans la substance finie, et partant que j'ai en quelque façon premièrement en moi la notion de l'infini, que du fini, c'est-à-dire de Dieu, que de moi-même".

chose: il n'y a pas de négation pure ou absolue, c'est-à-dire qui ne se réfère pas à quelque chose. Dans ces conditions, il semble impossible que le privatif ou le négatif soit connu avant ce dont il prive ou avant ce qu'il nie. Or tel est bien le cas du fini et de l'infini. Ce terme 'infini' se dit par négation ou privation du fini. Et l'on ne voit pas comment, selon notre propre mode de connaître, il pourrait en être autrement.

CONCLUSION

Notre étude touche à sa fin. Non pas parce qu'elle apporte une solution finale et définitive aux problèmes soulevés ou parce qu'elle clôt un débat, mais simplement parce qu'elle a atteint le but qu'elle s'était proposé: celui de mettre bien en face deux enseignements qui s'écartent sur plus d'un point.

En guise de remarque finale, nous croyons opportun de signaler et de souligner quelques propos d'Abraham A. Fraenkel et de Yehoshua Bar-Hillel qu'on trouve au début de leur ouvrage Foundations of Set Theory. Nous avons assez souvent mentionné Fraenkel au cours de ces pages en nous référant à son ouvrage antérieur Abstract Set Theory. L'exposé qu'on y trouve est ferme, assuré, les explications qu'il y fournit sont déterminées, catégoriques. Le ton y est décidé et ne laisse soupçonner aucune hésitation. La sureté qu'on y remarque peut nous y sembler inquiétante; elle est, en tout cas, étonnante.

Il est curieux de trouver un ton beaucoup moins assuré dans Foundations of Set Theory. Fraenkel y rappelle les trois crises majeures qui, au cours des siècles ont menacé de ruine tout l'édifice mathématique, crises qui, toutes trois, sont directement dues à l'intervention de l'infini en mathématiques sous diverses formes. La première crise est celle que les Pythagoriciens ont connue: la découverte des irrationnelles a en effet ruiné leur théorie des proportions qu'ils croyaient générale alors qu'elle ne valait que pour les quantités rationnelles. La seconde a suivi l'invention du calcul infinitésimal. La querelle à laquelle donna lieu l'usage des quantités 'infinitésimales' conduisit à l'arithmétisation de l'analyse et de la théorie des fonctions, ce qui replaça l'édifice mathématique sur des bases solides. L'arithmétique cantorienne provoqua la troisième crise à la fin du siècle dernier. Fraenkel reconnaît ici la gravité de cette crise. Dans les quelques lignes qui suivent on a peine à reconnaître l'assurance dont il faisait preuve dans son précédent ouvrage:

> More than the mere appearance of antinomies in the basis of a set theory, and thereby of analysis, it is the fact that various attempts to overcome these antinomies, to be dealt with in the subsequent chapters, revealed a fargoing and surprising divergence of opinions and conceptions on the most fundamental mathematical notions, such as set and number themselves, which induces us to speak of the third foundational crisis that mathematics is still undergoing[1].

Cet aveu de Fraenkel est nettement corroboré par cette confession de Hermann Weyl:

> We are less certain than ever about the ultimate foundations of (logic and) mathematics. Like everybody and everything in the world to-day, we have our "crisis". We have had it

[1] Foundations of Set Theory, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1958, p. 15.

> for nearly fifty years. Outwardly it does not seem to hamper our daily work, and yet I for one confess that it has had a considerable practical influence on my mathematical life: it directed my interests to fields I considered relatively "safe", and had been a constant drain on the enthousiasm and determination with which I pursued my research work[1].

Ces témoignages sont éloquents. Ils nous apprennent que la position des mathématiciens contemporains sur l'infini n'est peut-être pas aussi solide qu'on nous en donne parfois l'impression, ce qui, du même coup, montre que la position aristotélicienne et scolastique reste, après tout, fort acceptable.

---

[1] Cité par Fraenkel et Bar-Hillel à la page 5 de leur ouvrage Foundations of Set Theory.

BIBLIOGRAPHIE

ALBERT le GRAND, (saint), Opera omnia, éd. Borgnet, Paris, Vivès, 1890.

ARISTOTE, Physique, 2 vol., trad. Carteron, Paris, Les Belles Lettres, 1961.

Traité du Ciel, trad. Tricot, Paris, Vrin, 1949.

Métaphysique, 2 vol., trad. Tricot, nouv. éd. refondue, Paris, Vrin, 1953.

Topiques, trad. Tricot, Paris, Vrin, 1950.

AUGUSTIN, (saint), Opera omnia, 32 vol., Paris, Vivès, 1871.

BIRKHOFF, G et MACLANE, S. A Survey of Modern Algebra, New York, Macmillan, 1946.

BOLZANO, Bernard, Paradoxes of the Infinite, trad. Prihonsky, London, Routledge and Kegan Paul, 1950.

BOLL, Marcel, Les deux infinis, éd. revue, Paris, Larousse, (c. 1938).

BOREL, Emile, Les paradoxes de l'infini, 7e éd., Paris, Gallimard, (c. 1946).

BOUTROUX, Pierre, L'idéal scientifique des mathématiciens, nouv. éd., Paris, P.U.F., 1958.

BOYER, Carl B., <u>The Concepts of the Calculus</u>, New York, Hafner Publ. Co., 1949.

BRUNSCHVIECG, Léon, <u>Les étapes de la philosophie mathématique</u>, Paris, P.U.F., 1947.

CAJETANUS, Thomas De Vio (card.), <u>Commentarium in Primam Partem Summae theologiae Sti Thomae Aquinatis</u>, éd. Léonine, Rome, Ex Typographia Polyglotta S.C. de Propaganda Fide, 1888.

CANTOR, Georg, <u>Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers</u>, trad. P.E.B. Jourdain, New York, Dover Publ. Inc., 1915.

COHEN, I. Bernard, <u>The Birth of a New Physics</u>, New York, Doubleday, Anchor Books, 1960.

COURANT, R. et ROBBINS, H., <u>What is Mathematics?</u>, London, Oxford Univ. Press, 1948.

COUTURAT, Louis, <u>De l'infini mathématique</u>, Paris, Félix Alcan, 1896.

COURT, Nathan A., <u>Mathematics in Fun and in Earnest</u>, New York, The New American Library, A Mentor Book, 1961.

COXETER, H.S.M., <u>The Real Projective Plane</u>, New York, McGraw-Hill, 1949.

DANTZIG, Tobias, <u>Number the Language of Science</u>, 3e éd. rev. et augm., New York, Macmillan, 1939.

DARBON, André, La philosophie des mathématiques, Paris, P.U.F., 1949.

Une doctrine de l'infini, Paris, P.U.F., 1951.

DAVENPORT, H., The Higher Arithmetic, New York, Harper and Brothers, Harper Torch Books, 1960.

DEDEKING, R., Essays on the Theory of Numbers, trad. angl. Beman, Chicago, Open Court Publ. Co., 1924.

DESCARTES, R., Oeuvres de Descartes, publiées par Charles Adam et Paul Tannery, Paris, Vrin, s.s.

DIELS, Hermann, Die Fragmente der Vorsocratiker, 3 vol., 8e éd., Berlin, Weidmannsche, 1956.

DIENES, P., The Taylor Series, New York, Dover Publ., 1957.

EDDINGTON, A., The Nature of the Physical World, London, Dent and Sons, Everyman's Library, 1947.

ENGELS, F., Dialectique de la nature, trad. D. Naville, Paris, Marcel Rivière, 1950.

EUCLIDE, Les oeuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français, éditées par F. Peyrard, 3 vol., Paris. M. Patris, 1814.

FRAENKEL, A.A., Abstract Set Theory, Amsterdam, North-Holland, 1953.

FRAENKEL, A.A. et BAR-HILLEL, Yehoshua, Foundations of Set Theory, Amsterdam, North-Holland, 1958.

FREEMAN, Kathleen, Companion to the Pre-Socratic Philosophers, 2e éd., Oxford, Blackwell, 1959.

FREGE, Gottlob, The Foundations of Arithmetic, trad. angl. J.L. Austin, 2e éd. rev., Oxford, Blackwell, 1953.

GLORIEUX, P., La littérature quodlibétique, Belgique, Le Saulchoir Kain, t.1, 1925.

GODEAUX, Lucien, Les géométries, Paris, Armand Colin, 1947.

HARDY, G.H., A Course of Pure Mathematics, 9e éd., Cambridge, The Univ. Press, 1947.

HAUSDORFF, F., Mengenlehre, 3e éd., New York, Dover Publ. Inc., s.d .

HEATH, T.L., A Manual of Greek Mathematics, Oxford, The Clarendon Press, 1931.

- Greek Mathematics, 2 vol., Oxford, The Clarendon Press, 1921.

- Mathematics in Aristotle, Oxford, The Clarendon Press, 1949.

- The Thirteen Books of Euclid's Elements, 3 vol., 2e éd., New York, Dover Publ. Inc., 1956.

- The Works of Archimedes, New York, Dover Publ. Inc., s.d.

Histoire générale des sciences, 4 vol., Paris, P.U.F., 1957-1964.

JOHANNES a SANCTO THOMA, Cursus theologicus, Paris, Desclée, 1931.

KAMKE, E. Theory of Sets, 2e éd., trad. F. Bagemihl, New York, Dover Publ. Inc., (c. 1950).

KIRK, G.S. et RAVEN, J.E., The Presocratic Philosophers, Cambridge, The Univ. Press, 1957.

KNOPP, Konrad, Theory and Application of Infinite Series, 2e éd., trad. angl. R.C. Young, London, Blackie and Son, 1928.

KÖRNER, Stephen, The Philosophy of Mathematics, London, Hutchinson Univ. Library, 1960.

MANDONNET, P., Les écrits authentiques de S. Thomas d'Aquin, 2e éd. rev. et corr., Fribourg, Impr. de l'Oeuvre de St-Paul, 1910.

MANSER, Gallus M., Das Wesen des Thomismus, 3e éd. rev. et augm., Fribourg, Paulus, 1949.

MICHEL, P.H., De Pythagore à Euclide, Paris, Les Belles Lettres, 1950.

MONTUCLA, J.F., Histoire des mathématiques, 4 vol., Paris, Albert Blanchard, 1960.

MIKULAK, Maxim W., Soviet Philosophic-Cosmological Thought, dans Philosophy of Science, janv. 1958.

MOREUX, Thomas, Les confins de la science et de la foi, 2 vol., Paris, Gaston Doin, 1925.

PERRON, O., Irrationalzahlen, 2e éd., New York, Chelsea Publ. Co., 1948.

PEYRARD, F., Les oeuvres d'Euclide, en grec, en latin et en francais, 3 vol., Paris, M. Patris, 1814.

POINCARE, Henri, La science et l'hypothèse, Paris, Flammarion, s.d.

- Science et méthode, Paris, Flammarion, s.d.

PLATON, Oeuvres complètes, 8 vol., trad. nouv. E. Chambry, Paris, Librairie Garnier, s.d.

REY, Abel, L'apogée de la science technique grecque, Paris, Albin Michel, 1948.

RUSSELL, Bertrand, Introduction to Mathematical Philosophy, London, George Allen and Unwin Ltd, 1919.

- Mysticism and Logic, London, George Allen and Unwin Ltd, 1963.

- Our Knowledge of the External World, New York, The New American Library, 1960.

SERTILLANGES, A.D., L'idée de création et ses retentissements en philosophie, Paris, Aubier, (c. 1945).

SIERPINSKI, Waclaw, *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris, Gauthiers-Villars, 1950.

STRUIK, Dirk J., *Lectures on Analytic and Projective Geometry*, Cambridge, Addison-Wesley, 1953.

THOMAS d'AQUIN (saint)

In Aristotelis libros PeriHermeneias et Posteriorum analyticorum expositio, éd. Spiazzi, Rome, Marietti, (c. 1955).

In Aristotelis libros de Coelo et Mundo, de Generatione et Corruptione, Meterologicorum expositio, éd. Spiazzi, Rome, Marietti, 1952.

In Aristotelis librum de Anima commentarium, 4e éd. Pirotta, Turin, Marietti, (c. 1959).

In Boethium de Trinitate et de Hebdomadibus expositio, éd. Calcaterra, Rome, Marietti, 1954.

In duodecim libros Metaphysicorum Aristotelis expositio, éd. Spiazzi, Rome, Marietti, 1952.

In librum Beati Dionysii de divinis nominibus expositio, éd. Pera, Rome, Marietti, 1950.

In librum de Causis expositio, éd. Pera, Rome, Marietti, 1955.

In octo libros de Physico auditu sive Physicorum Aristotelis commentaria, éd. Angeli et Pirotta, Naples, M. D'Auria, 1953.

Opuscula omnia necnon opera minora, 2 vol., éd. Perrier, Paris, Lethielleux, 1949.

Questiones disputatae, 4 vol.,éd. Mandonnet, Rome, Marietti, 1931.

Questiones quodlibetales, éd. Mandonnet, Rome, Marietti, 1927.

Scriptum super libros Sententiarum, 4 vol., éd. Mandonnet et Moos, Paris, Lethielleux, 1929-33.

Summa contra Gentiles, éd. Léonine, Rome, Desclée-Herder, 1934.

Summa theologia, Madrid, Bibliotheca de Autores cristianos, 1961.

VERRIEST, Gustave, Les nombres et les espaces, Paris, Armand Colin, 1951.

VON WEIZSACKER, C.F., Le monde vu par la physique, trad. F. Mosser, Paris, Flammarion, 1956.

WERNER, Charles, La philosophie grecque, Paris, Payot, 1962.

WEYL, Hermann, The Open World, New Haven, Yale Univ. Press, 1932.

\- Philosophy of Mathematics and Natural Sciences, éd. angl. rev. et augm., trad. Olaf Hebner, Princeton, Princeton Univ. Press, 1949.

ZELLER, Eduard, Outlines of the History of Greek Philosophy, New York, Meridian Books, 1957.