Chapitre 1

Nature des Mathématiques

Les mathématiques grecques ou classiques se limitaient au domaine de la quantité :

> "Le mathématicien, dit Aristote, ... conserve seulement 'la quantité et le continu' à une, à deux ou à trois dimensions, avec leurs attributs, en tant que ces objets sont affectés de quantité et de continu." 1

Hors de là, il n'est pas question de mathématiques. A noter qu'il faut entendre ici le mot 'quantité' au sens défini par le philosophe grec au livre V de la Métaphysique, et non pas au sens de 'mesure' qui apparaît, on l'a vu, comme une propriété de la quantité. En raison de cet objet précis, les anciens ne reconnaissaient que deux espèces de disciplines mathématiques : la science du nombre ou l'arithmétique et la science du continu ou la géométrie.

La perspective moderne nous présente un tout autre paysage. De nos jours, le champ de la mathématique est devenu illimité et surtout imprécis. Si l'on consulte, en effet, l'abondante littérature consacrée à ce genre de connaissances, on s'aperçoit qu'aucune définition exacte des mathématiques n'a encore été donnée. Certains auteurs pensent même qu'en raison de la fécondité inépuisable[2] de ces sciences

---

1. XI Metaph., 1061 a 28 ss.

2. "... Cette extraordinaire 'efficacité' qui nous permet de recourir à leurs vertus chaque jour et presque à chaque seconde de notre vie individuelle comme de nos démarches collectives,

et de l'ampleur accrue[1] qu'elles prennent chaque jour, une description parfaite de leur nature se révèle impossible. D'ailleurs, les mathématiciens s'inquiètent assez peu, dans l'ensemble, d'étudier la structure d'un instrument qui, en lui-même, se révèle si fructueux entre leurs mains. Certains esprits plus soucieux d'unité estiment néanmoins qu'un retour périodique sur les données acquises s'impose de toute nécessité pour éviter la confusion des résultats et affermir la marche en avant par une mise au point clairvoyante.[2] Ces derniers auteurs nous fournissent des lumières plus précises sur l'objet des mathématiques.

Toutefois, comme chaque chercheur est forcément guidé par des vues partielles sur le sujet, la définition qu'il propose de cette science reflète l'aspect particulier de son investigation. On aboutit

---

pour assurer le succès de nos actes les plus humbles comme celui de nos entreprises les plus ambitieuses." F. Le Lionnais, Les grands courants de la pensée mathématique, p. 15. - "Donner à l'heure actuelle, une idée d'ensemble de la science mathématique, est une entreprise qui semble au premier abord offrir des difficultés presque insurmontables, en raison de 'l'étendue' et de la 'variété' du sujet". Ibid., p. 35.

1. Cf. Louis O. Kattsoff, A Philosophy of Mathematics, p. 8.

2. F. Gonseth, entre autres, exprime une opinion de ce genre dans les Fondements des mathématiques. G. Bouligand, dans La mathématique et son unité, montre que, malgré la diversité qui existe au sein de cette science, on y découvre cependant une unité foncière. Celle-ci est d'ailleurs reconnue par les mathématiciens contemporains : "Aujourd'hui... nous croyons que l'évolution interne de la science mathématique a, malgré les apparences, resserré plus que jamais l'unité de ses diverses parties, et y a créé une sorte de noyau central plus cohérent qu'il n'a jamais été. L'essentiel de cette évolution a consisté en une systématisation des relations existant entre les diverses théories mathématiques, et se résume en une tendance qui est généralement connue sous le nom de 'méthode axiomatique'". Ibid., p. 37.

ainsi à un amas d'opinions parfois contradictoires[1] sur la nature des mathématiques. De cette multitude d'approximations, essayons de dégager les notes les plus caractéristiques des mathématiques modernes.

Tout d'abord, la transition des mathématiques classiques aux mathématiques modernes s'est opérée de façon graduelle quoique rapide. Ainsi, certains pionniers des mathématiques modernes, tels Leibniz, Gauss, Euler, etc., ont proposé de ces sciences des définitions qui mentionnaient encore la quantité : sciences du nombre, de l'étendue, de la mesure - limitant ainsi l'objet de ces disciplines à un domaine encore restreint. Toutefois, ces définitions nous ramènent, selon la remarque de Kattsoff,[2] à une ère encore primitive où les mathématiques n'ont pris aucune ampleur véritable. Les développements contemporains de ces sciences débordent les conceptions limitées au champ de la quantité.[3] Car, de nos jours, n'importe quel débutant en mathématiques sait bien qu'elles dépassent de beaucoup l'étendue et le nombre : "That mathematics deals with more than magnitudes and numbers any tyro in the field knows."[4] Les nouveaux objets qu'elles enveloppent apparaîtront bientôt.

---

1. "No two definitions (of mathematics) are in complete agreement." E. T. Bell, The queen of sciences, p. 15.

2. Op. cit., p. 9.

3. "Russell's description of mathematics administers a resounding parting salute to the doddering tradition, still respected by the makers of dictionary, that mathematics is the science of number, quantity and measurement. These things are an important part of the material to which mathematics has been applied. But they are no more mathematics than are the paints in an artist's tubes the masterpiece he paints. They bear about the same relation to mathematics that oil and ground ochre bear to great art." E. T. Bell, op. cit., p. 17.

4. L. O. Kattsoff, Ibid.

Il faut auparavant montrer comment la quantité, entendue au sens traditionnel, a été bannie des mathématiques contemporaines, puis faire voir à quel point, dans les minimes parties de ces sciences où elle a survécu, elle a changé de signification.

Bertrand Russell marque bien, dans le texte suivant, l'étendue et les limites du rejet de la quantité :

> "In former days, dit-il, it was supposed (and philosophers are still apt to suppose) that quantity was the fundamental notion of mathematics. But nowadays, quantity is banished altogether, except from one little corner of Geometry..." 1

L'ensemble des mathématiciens contemporains endosseraient ce témoignage. Ainsi, selon Cajori,[2] les mathématiques ont dû être redéfi-

---

1. Mathematics and the Metaphysicians, op. cit., p. 1587. - "On a l'habitude de dire que les mathématiques sont la science des 'quantités'. Le mot quantité est vague; mais pour faciliter le raisonnement, nous pouvons le remplacer par le mot 'nombre'. L'affirmation que les mathématiques sont la science du nombre serait fausse pour deux raisons différentes. D'abord il y a des branches bien établies des mathématiques qui n'ont rien à voir avec le nombre; toute la géométrie qui n'emploie pas les coordonnées ou les mesures par exemple; la géométrie projective et descriptive jusqu'au moment où l'on introduit les coordonnées, n'ont point de rapport avec le nombre, ni même avec la grandeur dans le sens de 'plus grand' ou de 'moindre'. D'un autre côté ..., nous en sommes venus à pouvoir généraliser une grande partie de ce que l'on avait l'habitude de prouver seulement à l'aide des nombres." B. Russell, Introduction à la philosophie mathématique, p. 232.

2. History of Mathematics, p. 285.

nies : "La mathématique, science de la quantité" se range parmi les idées périmées qui remontent à Aristote. Cette définition et les autres du genre ne conviennent plus de nos jours, car plusieurs branches des mathématiques modernes, telles que la théorie des groupes, la topologie, la géométrie projective, la théorie des nombres et l'algèbre de la logique, n'impliquent aucune relation avec la quantité. Une conclusion importante qui ressort d'un examen critique des fondements des mathématiques, écrivent à leur tour E. Nagel et J.-R. Newman,[1] est que la conception traditionnelle de la mathématique comme 'science de la quantité' se révèle à la fois inadéquate et erronée. Les postulats de n'importe quelle branche de la mathématique démonstrative n'ont rien à voir avec l'espace, la quantité ou même avec un objet quelconque. Pour l'homme classique, ajoute enfin Oswald Spengler,[2] la géométrie et l'arithmétique étaient des sciences distinctes et complètes toutes deux appliquées soit aux grandeurs 'tracées' ou 'nombrées'; pour nous, au contraire, ces choses ne sont que des auxiliaires pratiques de la vie quotidienne. L'addition et la multiplication, ces deux méthodes classiques pour dénombrer les grandeurs, ont, tout comme le dessin géométrique, totalement disparu dans l'infinité des processus fonctionnels. Bref, l'histoire de la connaissance mathématique va de pair avec celle du savoir en général; dans les deux cas, on observe une 'émancipation progressive' de la pensée classique. Et le triomphe su-

---

1. Goedel's Proof, p. 1670.
2. Meaning of Number, p. 2335.

prême de la nouvelle mathématique consiste dans la suppression de la notion de grandeur : "... The development of the new mathematics consists of a long, secret and finally victorious battle against the notion of magnitude." Le concept de nombre, pourtant fondamental pour une partie importante des mathématiques, n'a pas résisté à la lutte :

> "The investigation of different kinds of series and their relations is now a very large part of mathematics, and it has been found that this investigation can be conducted without any reference to quantity, and, for the most part, 'without any reference to number'". 1

Le rejet global de la quantité s'accompagne, d'ailleurs, d'une méconnaissance générale de la signification de ce terme. Ainsi Cajori[2] identifie quantité avec mesure; de même Goblot, qui définit la mathématique comme 'la science de la quantité pure ou de la mesure en général, indépendamment de la nature des choses mesurables'; C. Sander Peirce[3] manifeste une confusion semblable. D'autres ramènent la quantité à une pure relation[4], etc.

Non seulement donc, la quantité, entendue au sens classique, mais encore la quantité assimilée à la mesure,[5] a disparu de la majeure partie des mathématiques. On lui a substitué les notions d'ordre, de relation, de

---

1. B. Russell, Mathematics and the Metaphysicians, p. 1587.
2. Op. cit.
3. The Essence of Mathematics, p. 1773.
4. B. Russell, Principles of Mathematics, pp. 161 ss.
5. Cajori, Op. cit., p. 285.

pur calcul, de constructibilité, de déduction absolue, etc. Qu'il suffise ici de passer brièvement en revue quelques-uns des objets qui ont ainsi pris la place de la quantité. On y observera une tendance manifeste à une généralisation toujours croissante : "L'esprit qui inspire les mathématiques depuis le milieu du XIXe siècle peut se condenser en un mot d'ordre, celui-ci en vaut sans doute un autre : généralisation toujours plus large..."[1]

La pure notion d'ordre apparaît, tout d'abord, comme l'un des concepts prédominants.

> "Mathematics has, in modern times, brought order into greater and greater prominence... Geometry, like Arithmetic, has been subsumed, in recent times, under the general study of order... Geometry becomes a department in the study of order". 2

Sans doute cette donnée intervient-elle dans la définition même de la matière intelligible et ainsi conserve-t-elle une affinité spéciale avec la quantité; il reste cependant que ces deux entités ne sauraient s'identifier : l'ordre déborde le domaine de la quantité; il

---

1. E. T. Bells, La Mathématique, reine et servante des sciences, pp. 32-33.

2. B. Russell, Mathematics and the Metaphysicians, pp. 1587-1588. - "The importance of order, from a purely mathematical standpoint, has been immeasurably increased by many modern developments... Irrationals are defined entirely by the help of order... In Geometry, von Staudt's quadrilateral construction and Pieri's work on Projective Geometry have shown how to give points, lines, and planes an order independent of metrical consideration and of quantity..." B. Russell, Principles of Mathematics, p. 199.

s'établit entre des objets distincts qui communiquent en vue du tout. Si les mathématiciens ont hypostasié le concept d'ordre, c'est vraisemblablement parce qu'il se pose au fondement de toute entité mathématique. Selon le R. P. Guérard des Lauriers, toute réalité mathématique est, en effet, construite de trois notions : l'ordinal, le cardinal, la limite. Et ces trois concepts impliquent un ordre, non plus l'ordre auquel pouvait faire songer le continu mais un ordre "plus dépouillé, dernière expression de l'essence".[1]

Le concept d'ordre suppose, de son côté, celui de relation. Autre notion que les mathématiciens exploitent à fond, comme on le verra plus en détail dans un chapitre ultérieur. Beaucoup souscriraient à l'opinion de Poincaré selon laquelle "les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse".[2] Que l'on supprime les objets dont parle Poincaré et l'on aboutira aux 'relations pures', sans fondement ni termes de l'école formaliste. Car à pousser dans le sens de la relation, on finit par trouver encombrante la signification même des termes comparés. Russell nous le fera comprendre au moment voulu. Le champion de la logique des relations ira même jusqu'à méconnaître quelque peu, sur ce point, les possibilités de la logique dite 'prédicationnelle'.

---

1. Analyse de l'être mathématique, dans Revue des Sciences philosophiques et théologiques, 22, 1933, p. 404.

2. La Science et l'Hypothèse, p. 32.

La logique symbolique et le formalisme hilbertien se présentent comme des limites dans la ligne de la relation 'épurée'; ces doctrines sont le fruit d'un cheminement long et laborieux vers l'affranchissement de tout objet, quel qu'il soit. Poincaré admettait certains objets dans les relations mathématiques. Et même de nos jours, il s'en trouve pour dénoncer les outrances de la pensée formaliste et proclamer la nécessité 'd'asseoir' les relations mathématiques sur des éléments positifs. S'agit-il cependant de données spécifiques ? Nullement : n'importe quel objet satisfait à cette exigence : "Les mathématiques, écrit Hadamard, sont la science de toute chose dont on peut raisonner exactement."[1] "If our hypothesis is about 'anything', renchérit Russell, and not about some one or more particular things, then our deductions constitute mathematics".[2]

On aura remarqué que les auteurs parlent de 'raisonnement' et de 'déduction'. A cause de la nécessité de la preuve en mathématique, on ne peut, en effet, s'en tenir à la notion de relation : le concept de déduction entre aussi en ligne de compte. Encore là cependant les mathématiciens ont élevé à la dignité d'objet un pur processus qui ne peut se justifier qu'en s'exerçant sur des entités distinctes de lui.

> "The sole question which confronts the pure mathematician... - observent E. Nagel et R. Newman - is not whether the postulates he assumes or the conclusions he deduces from them are 'true', but only whether the alleged conclusions

---

1. J. Hadamard, Encyclopédie Française, I, 1.52-1.

2. Mathematics and the Metaphysicians, p. 1577.

> are in fact the 'necessary logical consequences' of the initial assumptions". 1

Whitehead définit, à son tour, les mathématiques entendues dans leur sens le plus général comme "...the development of all types of formal, necessary 'deductive reasoning'"; ou encore : "(The) science concerned with the logical deduction of consequences from the general premisses of reasoning"[2]. Selon le même auteur, le raisonnement mathématique (d'ailleurs assimilable au raisonnement déductif en général), se base, comme n'importe quelle démonstration, sur des définitions. Or celles-ci n'exigent comme critère de validité que celui de la cohésion interne (self-consistency) de leurs éléments.

L'identification de la mathématique avec la logique, science générale du raisonnement, est devenue un lien commun pour les mathématiciens :

> "...La logique est devenue plus mathématique et les mathématiques sont devenues plus logiques. La conséquence est qu'il est maintenant impossible de tracer une ligne de démarcation entre les deux;

---

1. Goedel's proof, p. 1670.

2. Essays in Science and Philosophy, pp. 200-1. - Selon Benjamin Peirce, "Mathematics is the science which draws necessary conclusions". Linear Associate Algebra, 1870, sec. 1; American Journal of Mathematics, IV, 1881. - Pour Kasner, "Pure mathematics is concerned only with its own logical consistency and not with space or anything else". Mathematics and the Imagination, p. 116. - "What we wish to know is what can be deduced from what". B. Russell, Mathematics and the Metaphysicians, p. 1578.

en fait, 'les deux ne font qu'une'. Elles diffèrent comme un enfant diffère d'un homme; la logique est la jeunesse des mathématiques et les mathématiques sont la virilité de la logique". 1

Les opinions sur ce sujet se divisent en trois groupes : les plus modérés sont d'avis que les mathématiques constituent seulement une branche de la logique;[2] d'autres, comme B. Russell, identifient tout simplement les deux sciences; les plus radicaux font découler la logique des mathématiques; pour ces derniers, la logique devient une branche des mathématiques.[3] Il restera à préciser en quel sens ces différents auteurs entendent la logique. On peut tout de suite affirmer que, sauf de rares exceptions, quand les philosophes des mathématiques parlent de logique, ils visent 'la science commune du raisonnement'. Dans le chapitre qui traitera de la logistique, cette assertion recevra d'importants compléments.

Que la mathématique s'assimile à la logique formelle, c'est là certes une transformation importante. Certains ambitionnent pourtant une évolution encore plus complète. Whitehead désirerait, par

---

1. B. Russell, Introduction à la philosophie des mathématiques, p. 231. - Cf. : Principles of Mathematics, p. 8, no 10; etiam : Mathematics and the Metaphysicians, p. 1576. - "All pure mathematics - Arithmetics, Analysis, and Geometry - is built up by combinations of the primitive ideas of logic, and its propositions are deduced from the general axioms of logic, such as the syllogism and the other rules of inference". Ibid., p. 1577.

2. v.g. Carl G. Hempel, On the Nature of Mathematical Truth, p. 1631, no 10.

3. v.g. G. Sanders Peirce, The Essence of Mathematics, p. 1773.

exemple, ériger un calcul[1] susceptible de faciliter le raisonnement dans tous les domaines de la connaissance intellectuelle ou sensible. L'effet le plus apprécié d'une pareille technique résiderait dans une admirable économie de pensée toujours souhaitable, en sciences, comme le notait Mach.[2] En outre, on n'aurait plus besoin, en ce cas, d'inférence entendue au sens de Bradley.[3] Selon cette conception, la mathématique se ramènerait à un mécanisme d'où la pensée serait exclue : "We invent some new and difficult symbolism, in which nothing seems obvious. Then we set up certain rules for operating on the symbols, and the whole thing becomes mechanical".[4]

Le bref exposé précédent suffit à montrer que la 'notion de mathématiques' s'est généralisée de plus en plus. D'abord limitée à l'étroit domaine de la quantité, cette science s'est universalisée au point d'atteindre, dans sa forme la plus évoluée, un niveau encore plus

---

1. Whitehead définit ainsi le Calcul : "The art of the manipulation of substitutive signs according to fixed rules, and of the deduction therefrom of true propositions". A Treatise on Universal Algebra, pp. 3-4. - George Boole décrit comme suit les caractéristiques d'un calcul : "We might justly assign it as the definitive character of a true Calculus, that it is a method resting upon the employment of symbols, whose laws of combination are known and general, and whose results admit of a consistent interpretation". Mathematical Analysis of Logic, pp. 1856-57.

2. Ernst Mach, The Economy of Science, pp. 1787 ss.

3. Bradley, Principles of Logic, Bk II, Pt I, ch. III.

4. B. Russell, Mathematics and the Metaphysicians, p. 1578.

commun, en un sens, que celui de la métaphysique.[1] Cette dernière considère l'être, ses parties et ses propriétés, 'en tant qu'être', c'est-à-dire en tant que ces entités participent à l'être envisagé sous le rapport de la communauté analogique et non pas au seul point de vue d'une communauté de prédication, laissée indécise. La mathématique, envisagée au moins sous sa forme la plus évoluée, n'est plus une science strictement unifiée; elle n'a plus d'objet bien défini; et l'ensemble de ce qui porte maintenant le nom de mathématique s'assimilerait plutôt à des fictions aussi rigoureuses que commodes. Ainsi, tout ce qui entre, par exemple, sous l'intention commune de 'relation', de 'non-contradiction', de 'déduction absolue', de 'pur calcul', etc., s'intègre au domaine mathématique. De la sorte, 'tout', 'n'importe quoi', les objets même les plus disparates, qu'ils aient rapport ou non à la quantité, tombent sous la considération mathématique. Les témoignages les plus explicites de célèbres mathématiciens corroboreraient ce point de vue. La suite de cette étude apportera les preuves de ce fait, surtout au chapitre sur l'abstraction mathématique.

Pour justifier le mathématisme universel, on invoquera l'exemple de Pythagore. Tout, pour lui, devenait matière mathématique, puisque le nombre constituait l'essence de toute chose - "Toutes choses

---

1. Bien que Whitehead n'entende probablement pas la métaphysique dans le sens traditionnel, il est cependant d'accord pour admettre le point de vue signalé ici : "The generality of mathematics, écrit-il, is the most complete generality consistent with the community of occasions which constitutes our metaphysical situation". Science and the Modern World, p. 33.

sont nombres". A noter cependant que, dans la pensée pythagoricienne, la mathématique demeurait toujours la 'science de la quantité'. Il lui suffisait de quantifier les choses pour voir la mathématique prendre une ampleur illimitée. Mais l'objet de cette science demeurait inchangé : la mathématique abordait tout être sous l'aspect quantitatif. L'audace de Pythagore est d'avoir universalisé la quantité, ou, plus précisément, le nombre. De nos jours, on supprime la quantité et on universalise la mathématique en lui attribuant un objet nouveau et illimité. La mathématique touche, un peu comme au temps de Pythagore, à toutes les sphères de l'être, mais sous un angle neuf. Cette discipline autrefois plutôt restreinte a supplanté la métaphysique, sans toutefois la remplacer. Elle n'a même remplacé aucune des sciences qu'elle a voulu supprimer. Les sciences se complètent, bien loin de se substituer l'une à l'autre; elles abordent l'être sous des aspects différents mais complémentaires. La mathématique contemporaine nie, comme on le verra plus en détail, cette diversité des objets de science. Elle s'affiche comme 'la' science. Elle réunit sous une espèce d'unité indifférenciée tous les sujets scientifiques. Que la matière soit naturelle, psychologique, morale, métaphysique... peu importe. Du moment qu'on pose certaines prémisses non contradictoires et qu'on en tire une conclusion quelconque, on fait des mathématiques.

Telle apparaît, en raccourci sans doute, la 'nature' de l'ensemble des mathématiques suivant les auteurs modernes qui font la philosophie. On peut à présent se demander si, sur le plan de la seule définition, les mathématiciens modernes prolongent les mathématiques anciennes; si, en d'autres termes, il existe une continuité entre les unes et les autres. Une réponse exhaustive à cette question suppose plusieurs développements complémentaires présentés dans les chapitres suivants. Cependant, il paraît dès maintenant possible, en se plaçant au niveau de la stricte définition, d'indiquer si l'esprit des mathématiques traditionnelles se reconnaît dans les mathématiques modernes.

Comme on a pu s'en rendre compte, il apparaît que, dans son ensemble, c'est-à-dire comme corps doctrinal, la mathématique contemporaine est interprétée d'une façon toute nouvelle. Si, en effet, l'on excepte une minime partie des mathématiques actuelles, où l'on retrouve encore la notion de quantité,[1] l'immense secteur de ces sciences qui s'est constitué en dehors du domaine quantitatif ne nous permet plus de concevoir comme identiques, ou même comme continus, des systèmes de connaissances aussi disparates.[2] La masse des définitions mo-

---

1. "...Nowadays, quantity is banished altogether (from mathematics), 'except from one little corner of Geometry'", comme s'exprime B. Russell, Mathematics and the Metaphysicians, p. 1587.

2. Les philosophes modernes soulignent souvent une telle discontinuité de pensée : "Such studies as those of Pasch, Peano, Hilbert and Pieri in euclidean geometry provided a tremendous impetous for investigations of possible formal organizations of the subject matter of this old discipline; these considerations, in turn, provided a 'new understanding of mathematical systems in general' and were partly responsible for the remarkable mathematical advances of the twentieth century..." Raymond L. Wilder, The Axiomatic Method, in The World of Mathematics, p. 1650, l.6. - Oswald Spengler évoque le même point de vue de façon limpide et énergique : "The liberation of geometry from the visual, and of algebra from the notion of magnitude, and the union of both, beyond all elementary limitations of drawing and counting, in the great structure of function-theory this was the grand course of Western number-thought. The constant number of the classical mathematic 'was

dernes de la mathématique (définitions partielles, on l'a rappelé) indique un progrès sensible vers une abstraction généralisante des plus décisives. Ce fait suffit à démontrer que les modes de définir ancien et modernes diffèrent du tout au tout. L'abstraction formelle d'Aristote isolait la quantité comme telle et négligeait toutes les notes sensibles; il ne restait, dans l'intelligence, qu'une pure entité homogène conçue sans aucun lien actuel avec la nature. Tel était l'objet de la mathématique ancienne. Le 'mode de définir' dans les mathématiques actuelles (si toutefois il est légitime de parler d'un mode de définir dans le cas d'un substitut d'universel aussi confus !) consisterait à négliger, non seulement la matière sensible, mais encore la quantité elle-même, les différences de nature des objets intéressés, pour ne retenir que la formalité suivante, à savoir : la 'possibilité d'effectuer les mêmes opérations' (c'est-à-dire les quatre opérations fondamentales du calcul) sur des objets quelconques. Les définitions mathématiques modernes sont donc opérationnelles en un sens nouveau, lui aussi : ces opérations de calcul s'exercent d'une façon mécanique sur de purs symboles devenus objets.

Si les sciences se distinguent par leurs modes de définir, les mathématiques anciennes et modernes paraissent, au point de vue

---

dissolved' into the variable. Geometry 'became' analytical and 'dissolved' all concrete forms, replacing the mathematical bodies from which the rigid geometrical values had been obtained, by abstract spatial relations all to sense-present phenomena, etc., etc." Meaning of Numbers, p. 2343-44. Tout ce paragraphe et même tout cet article marque de façon on ne peut plus précise l'éloignement progressif des mathématiques modernes des systèmes anciens.

philosophique, totalement irréductibles. Les chapitres suivants confirmeront, en général, cette constatation. Il reste cependant que sur certains points fondamentaux les divergences s'atténuent entre ces deux modes de savoir et parfois même, une continuité réelle (d'ailleurs reconnue par les philosophes modernes eux-mêmes), quoique peu apparente à certains égards, s'observe entre ces deux blocs doctrinaux devenus fort difficiles à délimiter.

Ce chapitre initial requiert de multiples compléments que les chapitres ultérieurs tenteront d'assurer. Car c'est peu à peu que s'éclaire le problème complexe de la 'nature' des mathématiques selon la philosophie dont on les entoure.

Chapitre 2

Le problème du continu et du discret

L'évolution des mathématiques quant à leurs principes essentiels s'accompagne naturellement d'une transformation parallèle des concepts fondamentaux de continu et de discret. Autrefois jugées irréductibles, ces notions le sont-elles demeurées, ou n'ont-elles pas, au contraire, subi des modifications successives qui empêchent désormais de les distinguer suivant les règles de la pensée ancienne ? La solution de ce problème importe d'autant plus que le continu et le discret jouent un rôle de premier plan en mathématique.

Après un bref rappel de la position traditionnelle, l'attitude philosophique moderne apparaîtra en un relief plus marqué et, par suite, la manière différente d'envisager les mathématiques éclatera davantage encore.

Dans le troisième chapitre du livre V des Physiques, Aristote, en vue d'éclairer la définition du continu, expose certaines données préliminaires sur le sujet : "Après cela, écrit-il, il faut dire ce que c'est qu'être 'ensemble' et 'être séparé', ce que c'est qu'être 'en contact', 'intermédiaire', 'consécutif', 'contigu', 'continu'..." Retenons seulement ici ce qu'il propose sur les trois dernières notions mentionnées : "Est 'consécutif', dit-il, ce qui, venant simplement après le commencement et déterminé ainsi par la position ou par la propriété ou autrement, n'est séparé de la chose avec laquelle il y a consécution par aucun intermédiaire du même genre". Le consécutif implique une direction tantôt relative tantôt absolue, mais pas nécessairement spatiale; il exige, en outre, l'ordre comme élément essentiel. "Le 'contigu' est ce qui, étant consécutif, est en outre en contact".[1] On sera bientôt à même de constater le rôle exclusif attribué aux notions de 'consécutivité' et de 'contiguité' dans le 'continu' tel qu'on en parle aujourd'hui. Aristote y voit cependant autre chose :

> "Je dis qu'il y a continuité, poursuit-il, quand les limites par où les deux choses se touchent ne sont qu'une seule et même chose, et, comme l'indique le nom, tiennent ensemble; or cela ne peut se produire quand les extrémités sont deux. Une telle définition montre que le continu se trouve dans les choses dont la nature est de ne faire qu'une lorsqu'elles sont en contact". 2

Les exemples choisis montrent que ces définitions s'appliquent au domaine mathématique aussi bien que naturel.

Le nombre ou quantité discrète implique, à la différence du continu, des parties distinctes non jointes par un terme commun.[3]

Dans la pensée d'Aristote, ces deux notions s'opposaient, de façon irréductible, au sein du genre quantité. Les modernes ont rapproché ces concepts jusqu'à les identifier totalement. Il importe maintenant d'étudier le mode d'une telle assimilation et d'en mesurer

---

1. Ibid.

2. Voir une étude plus élaborée de la notion de continuité à la Section II de la Première Partie.

3. Voir : Ibid.

les répercussions sur les mathématiques en général.

"La ligne droite, écrit Dantzig, nous apparaît comme le prototype des choses continues, parce que nous la concevons comme engendrée par un trajet continu..."[1] La mathématique moderne n'a cependant pas tardé à introduire la discontinuité au sein de cette notion fondamentale. Elle conçoit le continu linéaire comme un 'agrégat de points'.[2] La surface devient, de son côté, un agrégat de lignes et, par suite, un agrégat de points; elle se ramène, en fin de compte, à un agrégat d'agrégats de points. Ces deux collections de points diffèrent cependant : la première ne comporte qu'une dimension et la seconde deux. Le volume peut être envisagé, à son tour, comme un agrégat de surfaces et, en définitive, comme un agrégat de points à trois dimensions.[3] Et voilà la discontinuité installée au fondement même de toute quantité.[4] Une telle transformation du continu, survenue au cours

1. Tobias Dantzig, Le nombre langage de la science, trad. Cros, Payot, Paris, 1931.

2. "The straight line, for the Greeks a measurable edge, is for us an infinite continuum of points". Oswald Spengler, Meaning of Numbers, p. 2339.

3. William Kingdon Clifford, The Postulate of the Science of Space, p. 556.

4. "We spoke of a line as an aggregate of points. Now there are two kinds of aggregates, which are called respectively continuous and discrete". Ibid., p. 557. - Dedekind définissait le continu comme suit : "If all points of the straight line fall into two classes such that every point of the first class lies to the left of every point of the second class, then there exists one and only one point which produces this division of all points into two classes, this severing of the straight line into two portions". Continuity and Irrational Numbers, p. 11.

de l'histoire des mathématiques, semble s'expliquer par l'origine même du nombre. Celui-ci ne résulte-t-il pas de la division du continu?[1] Les mathématiciens ont tout d'abord cru découvrir une correspondance parfaite entre la totalité des nombres réels et l'ensemble des points d'une ligne : "... Le système des nombres réels, d'après son origine même, nous offre une traduction parfaitement exacte - une traduction littérale, pourrions-nous dire - du continu linéaire ou continu à une dimension, c'est-à-dire de l'ensemble des points d'une ligne droite..."[2] En présence de ces deux agrégats (d'un côté la collection des nombres réels ou le continu arithmétique, de l'autre, l'ensemble des points de la ligne droite ou 'continu linéaire')[3], le fameux axiome Cantor-Dedekind est apparu. Selon ce principe, il "est possible d'assigner à tout point quelconque d'une ligne un nombre réel unique, et, réciproquement, tout nombre réel quelconque peut être représenté d'une manière par un point d'une ligne".[4] Et il faut, bien entendu, interpréter cet énoncé en toute rigueur de termes, c'est-à-dire comme une déclaration d'identité des deux espèces de continus,[5] et non comme une simple hypothèse. Ce postulat est à l'origine d'une nouvelle entité mathématique : la li-

---

1. Voir : Partie I, Section II.

2. Encyclopédie Française I : L'Outillage mental, Pensée-Langage-Mathématique, 1.52-15.

3. "I shall give two examples of mathematical continuity. The series of real numbers - composed of the rational and irrational numbers - is continuous; 'so is the class of points on a line segment'." Commentary on Continuity, p. 2410.

4. T. Dantzig, Op. cit.

5. "No sharp line divides the two (viz. the continuum and the

gne arithmétique. "A partir de maintenant, la ligne - et par conséquent le plan et l'espace - cesse d'être une notion intuitive;[1] elle n'est qu'un 'simple véhicule de nombres'"[2]

Dès lors, non seulement, de nos jours, la notion de continuité entendue au sens ancien n'intéresse plus le mathématicien, mais même le continu linéaire défini comme un agrégat de points le laisse, comme tel, indifférent : seule l'intéresse la 'transposition numérique' de la ligne composée de points. Cette conversion de la ligne en éléments discrets constitue l'axiome fondamental de la géométrie analytique qui, par là, diffère grandement de la géométrie intuitive :

> "The conversion of spatial concepts into numerical concepts thus raises all geometrical inquiry to a new intellectual level. The substantial form-concepts of ancient geometry, which remain opposed to each other in bare isolation, are changed by this into pure 'serial concepts' which can be generated out of each other by a certain fundamental principle".[3]

---

discrete), and the master mathematicians have worked with equal ease in both the continuous and the discrete". E. T. Bell, The Development of Mathematics, p. 12.

1. Selon Gonseth, la méthode analytique dépouille les êtres géométriques de leur contenu intuitif. La Géométrie et le problème de l'espace, p. 18. - Par l'axiome Cantor-Dedekind consacrant l'arithmétisation de la géométrie, "l'analyse se trouve libérée de l'intuition géométrique, à laquelle elle devait sa création et son évolution". T. Dantzig, Ibid. - Voir encore sur ce point : Encyclopédie Française, début.

2. T. Dantzig, Ibid.

3. Ernst Cassirer, Substance and Function, p. 71.

Le nombre a supplanté la grandeur, même dans le domaine de la géométrie;[1] l'espace entier s'est transmué en concepts numériques;[2] c'est ce qu'on entend par l'arithmétisation de la géométrie : "... Le conflit séculaire entre nos notions de continuité et le concept scientifique du nombre s'est terminé par la 'victoire décisive de ce dernier'".[3] En conséquence, seuls l'ordre[4] et l'extension mumériques demeurent dans les mathématiques modernes, et les lois arithmétiques régissent jusqu'au domaine géométrique.[5] La géométrie analytique a d'ailleurs opéré en ce sens, même avant la formulation de l'axiome Cantor-Dedekind, qui constituait tacitement le postulat fondamental de cette science.[6]

---

1. "The intuitive geometrical line is thus resolved into a 'pure succession of numerical values', connected with each other by a certain arithmetical rule". Ibid., p. 73.

2. "Not only length, but every geometrical object and every geometrical operation can be referred to the realm of numbers". Courant and Robbins, What is Mathematics, p. 73.

3. T. Dantzig, Op. cit., p. 179.

4. Voir : Edward V. Huntington : The Continuum and other Types of serial order, Intr., p. 1.

5. Cf. Whitehead, An Introduction to Mathematics, pp. 180 ss. Pour l'auteur, l'arithmétique et la géométrie se situent à un même niveau d'abstraction, car l'étendue (spaciness) n'entre pas dans le 'raisonnement' mathématique. Elle intervient si le mathématicien le veut bien. Question de goût !

6. "Mathematicians, ever since they began to apply arithmetic to geometry, became alive to the fact that it was convenient to represent points on a straight line by numbers, and numbers by points on a straight line". Ph. E. B. Jourdain, The Nature of Mathematics, p. 25.

Cette révolution, qui ne présente plus de nos jours de caractère bien tragique, aurait semblé difficilement concevable aux anciens, tellement les domaines qu'elle rapproche paraissaient étrangers l'un à l'autre : "La géométrie analytique était le premier exemple historique d'une parenté établie entre deux branches des mathématiques 'non seulement fort différentes', mais connues depuis l'origine 'pour être en conflit direct' : l'arithmétique et la géométrie".[1] Si une existence déjà longue de la géométrie analytique nous a habitués à confondre dans la pratique le continu et le discret, faut-il croire cependant que le problème de leur distinction ait cessé de se poser, ou que leur identification n'entraîne plus de difficultés théoriques ? Loin de là :

> "... La relation entre continu et discontinu en elle-même, écrit Fraenkel, mérite d'être traitée toujours de nouveau; elle peut, certes, être considérée comme le problème le plus profond et le plus difficile de la construction logique des mathématiques; problème qui a résisté à plus de deux mille ans d'efforts des philosophes et des mathématiciens de Zénon d'Elée à Poincaré, Hilbert et Herbrand". 2

Gonseth, le profond philosophe des choses mathématiques, parle dans le même sens :

> "Edifier une géométrie analytique, dit-il, c'est instituer un modèle arithmétique (au sens large)

---

1. T. Dantzig, Op. cit., p. 200.

2. Continu et Discontinu, p. 193.

> de l'espace. Or l'institution d'un tel modèle pose, à son tour, de difficiles problèmes 'dont la recherche sur les fondements mathématiques n'a pas encore fait le tour'. Le modèle en particulier ne peut pas être considéré comme parfaitement fondé en l'absence d'une démonstration de non-contradiction relative au substrat mathématique dont il est fait, démonstration que 'nous ne possédons pas' et dont 'nous ne savons pas sur quelle base elle pourrait être faite'". 1

Si, d'une part, l'assimilation du continu au discret pose des problèmes apparemment insolubles et que, d'un autre côté, la question semble intéresser les fondements mêmes des mathématiques,[2] la disparité de nature entre ces notions ne paraît-elle pas confirmée ? Sans doute le problème ne se règle-t-il pas aussi facilement, mais l'échec persistant des modernes dans leur tentative de "jeter un pont sur l'abîme entre l'infini dénombrable et le continu"[3] semble bien indiquer que le philosophe grec voyait juste.[4] D'ailleurs, cette question

---

1. La Géométrie et le Problème de l'espace, VI, p. 124. - En attendant la solution de ce problème, si jamais on la découvre un jour, le même auteur soutient ailleurs que "... De toutes manières on est obligé de retomber sur la distinction de deux 'écoles' en mathématiques, et de deux seulement : 'l'école du dénombrable, l'Arithmétique, et l'école du continu, la Géométrie'". Les Fondements des Mathématiques, p. 40.

2. Fraenkel l'appelait "le problème central du fondement des mathématiques" devancé cependant par "l'abîme entre le fini et l'infini dénombrable". Op. cit., Ibid.

3. Ibid.

4. "... Certaines tendances dans les mathématiques modernes semblent confirmer le dualisme posé par Aristote entre le nombre et la grandeur... Tel est le cas pour la théorie des ensembles, la géométrie projective, la théorie des groupes, les systèmes topologiques et les algèbres abstraites..." Th. Greenwood, dans Revue de l'Université d'Ottawa, section spéciale, vol. 12, 1942, p. 65.

revêt bien des aspects 'philosophiques'. Certains mathématiciens contemporains, comme Pierpoint, Bell et Fraenkel le reconnaissent explicitement. Les vains efforts des mathématiciens pour trouver une solution à ce problème semblent confirmer aussi ce point de vue. Et même si Aristote n'a pas pu résoudre les paradoxes de Zénon en termes de dérivées et de séries convergentes, sa position ne conserve-t-elle pas certains aspects encore valables ? Car "on peut se demander si la notion de convergence résoût vraiment les 'implications métaphysiques' des paradoxes de l'Eléate".[1]

Pour cette question de l'arithmétisation du continu, Aristote manifeste, en effet, "un esprit différent" de celui de l'analyste moderne. Il n'est pas surprenant qu'ils aboutissent l'un et l'autre à des résultats divergents : le premier admet l'impossibilité de construire numériquement le continu;[2] le second pose au fondement même de sa science un tel postulat.

Si, en pratique, la position moderne s'est révélée des plus féconde, cela ne règle en rien le problème sur le plan théorique. L'argument de l'efficacité invoqué tant de fois par beaucoup de mathématiciens contemporains, laisse intactes les difficultés théoriques sou-

1. Th. Greenwood, dans Revue de l'Université d'Ottawa, section spéciale, vol. 12, 1942, p. 82.

2. "... Et puis, comment des nombres inétendus seront-ils causes de l'étendue et du continu ? Ce n'est pas le nombre, en effet, qui pourra produire le continu, soit à titre de cause motrice, soit à titre de forme..." Metaph., XII, 10, 1075 b 28.

levées par l'identification du continu et du discret.[1] Le praticien, ne visant qu'au rendement, ne se soucie guère de certaines petites obscurités notionnelles qui semblent n'entraver en rien ses tentatives présentes. Mais pour le philosophe soucieux avant tout d'assurer la 'rigueur des fondements mathématiques', la question mérite d'être "traitée toujours de nouveau".[2] C'est pourquoi, sans prétendre régler le conflit sur le plan mathématique, il sera peut-être utile de souligner quelques-unes des implications que suppose l'arithmétisation du continu et, par conséquent, la géométrie analytique.

Se plaçant tout d'abord sur le plan des définitions, Aristote démontre, au sixième livre de sa Physique, que nul continu n'est composé d'indivisibles[3] et donc que la ligne 'selon sa substance et sa définition' ne peut résulter d'un agrégat infini de points. Pour lui, affirmer que le continu se compose d'indivisibles, c'est ouvrir la porte à des contradictions sans fin.[4] On a bien essayé, comme on l'a

---

1. Les obstacles pratiquement insurmontables rencontrés jusqu'ici par les mathématiciens 'dans la recherche des fondements mathématiques de la géométrie analytique' (Gonseth) ne manifestent-ils pas tout d'abord que 'le véritable continu mathématique est tout autre chose que celui des physiciens et celui des métaphysiciens' (Poincaré); puis que certains problèmes demeureront à jamais insolubles tant qu'on n'empruntera que la perspective mathématique', pour la bonne raison que la philosophie a son mot à dire dans les questions de 'nature', de 'substrat' et de 'fondement'. On peut même soutenir que les efforts renouvelés pour surmonter la différence entre le continu et le discret n'aboutissent, en définitive, qu'à mieux marquer sa réalité. Le continu numérique présuppose, en effet, la notion première d'extension, et le nombre irrationnel, grâce auquel 'le corps des nombres acquiert la même plénitude ou la même continuité que la ligne droite' (Dedekind), n'est autre qu'un symbole arithmétique du point désigné sur une droite, indivisible qui en joint les deux segments qui se continuent par lui.
2. Fraenkel, Op. cit.
3. Lect. I; Cf. S. Th., In III Phys., 1, 3; In I De Coelo, 2, 2.
4. Voir ses principales preuves dans VI Phys., lect. 1, etc.; Lib. VIII, ch. 8 (S. Th., lect. 17).

vu, de surmonter, par le processus à l'infini, la division intrinsèque du continu,[1] on a cru 'remplir les trous', détruire l'interstice entre deux nombres par la multiplication indéfinie des fractions entre ces nombres. On ferait fausse route en pensant reconstituer, par ce moyen, le continu linéaire; on forcerait ainsi le processus à la limite, car la limite d'une variable ne peut jamais être considérée comme atteinte.[2]

Par l'arithmétisation du continu et la géométrisation du nombre, les philosophes des mathématiques ont tout simplement créé un continu 'd'une autre espèce';[3] un continu 'discret', pourrait-on dire, la ligne arithmétique et, par suite, le plan et l'espace 'discontinus'. La négligence de la distinction entre le continu 'ancien' et le continu 'moderne' est, semble-t-il, à l'origine de bien des confusions dans les discussions portant sur la nature de la continuité mathématique.

---

1. Cf. T. Dantzig, Le nombre langage de la science, ch. IX.

2. Cf. Charles De Koninck, Méthodologie Scientifique, 1940-41, IV, A, pp. 30 ss. - Juvenal Lalor, Notes on the Limit of a Variable, in Laval Théologique et Philosophique, Vol. I, 1945.

3. "Le continu ainsi conçu n'est plus qu'une collection d'individus rangés dans un certain ordre, en nombre infini, il est vrai, mais 'extérieurs' les uns aux autres. 'Ce n'est pas là la conception ordinaire', où l'on suppose entre les éléments du continu une sorte de lien intime qui en fait un tout, où le point ne préexiste pas à la ligne, mais la ligne au point. De la célèbre formule, le continu est l'unité dans la multiplicité; la multiplicité seule subsiste, l'unité a disparu. Les analystes n'en ont pas moins raison de définir leur continu comme ils le font, puisque c'est toujours sur celui-là même qu'ils raisonnent depuis qu'ils se piquent de rigueur. Mais c'est assez pour nous avertir que 'le véritable continu mathématique est tout autre chose que celui des physiciens et celui des métaphysiciens'". H. Poincaré, La Science et l'Hypothèse, p. 29.

La création de la ligne arithmétique se pose au fondement de la géométrie analytique. Cette science traite, comme on l'a vu, le continu au même titre que le discret. Même si Platon avait posé le problème de l'arithmétisation du continu, il appartenait à Weierstrass, Cantor et Dedekind de donner un fondement solide à cette conception. Ils ont réussi leur tentative, dans l'ordre mathématique, grâce à la perfection des instruments techniques mis à leur disposition par le progrès même de la science. Mais leur succès ne s'est révélé que partiel; ils laissaient irrésolues certaines implications logiques et métaphysiques dont il importe de compléter l'exposé.

En actualisant la division du continu, les mathématiciens modernes ne pouvaient l'attaquer plus à fond; ils l'ont atteint à la racine même. Le continu 'se définit', en effet, par la 'potentialité' de la division; or, substituer à cette conception la division 'actuelle' du nombre,[1] revient à la détruire sans possibilité de reconstruction. La conception moderne et la conception ancienne du continu tiennent leur opposition de celle même de la 'puissance' et de 'l'acte' et, en définitive, ces attitudes divergentes se révèlent tout aussi irréductibles que celles qui caractérisent le continu et le nombre.[2] On se rend

1. En insérant des points et des nombres dans le continu, on détermine ses parties potentielles et confuses. Dans cette arithmétisation de la ligne, l'insistance peut porter sur la correspondance bi-univoque des nombres et des points ou sur leur ordre.

2. La parole suivante de Brunschvicg peut, sans difficulté, s'appliquer au propos actuel : "... Nous comprenons facilement que les mathématiciens ne s'embarrassent guère des distinctions spéculatives entre le 'possible' et le 'réel'. Du moment que

compte, une fois de plus, de certains inconvénients qui peuvent résulter de leur identification dans le calcul. Du moins, celui-ci, décidément tourné vers la technique mathématique, s'avère-t-il, comme tel, impuissant à justifier les anomalies qui découlent de l'assimilation d'entités foncièrement différentes.

De même, la justification de la géométrie analytique, qui n'est que de l'algèbre appliquée en géométrie, parfaitement valable, ne peut relever complètement d'un succès compatible avec bien des confusions. C'est ainsi que Newton et Leibniz se sont trompés sur la nature de l'infiniment petit sans que le succès de leur calcul en fût affecté. On a vu, dans la seconde section de cette étude,[1] qu'en regard de nos propres principes, la géométrie analytique méritait difficilement le nom de science au sens aristotélicien; ce qui n'empêche pas d'ailleurs sa fécondité prodigieuse.

Que la démonstration proprement dite soit disparue de la géométrie analytique, les modernes eux-mêmes le reconnaissent explicitement. La cause en réside dans l'application du calcul algébrique en géométrie :

---

les notions fondamentales de la mathématique abstraite sont possibles, elles ont toute la réalité dont la science a besoin pour se constituer. Déjà Desargues écrivait : 'En géométrie, on ne raisonne point sur des quantités avec cette distinction qu'elles existent ou bien effectivement en acte ou bien seulement en puissance". L. Brunschvicg, Les étapes de la philosophie mathématique, p. 353.

1. Partie I, Section II, ch. 4.

> "La géométrie de Descartes, écrit Bouligand, est le premier pas vers une 'liaison substantielle entre géométrie et algèbre'. Il s'en dégage implicitement un 'principe d'équivalence' en vertu duquel 'tout' problème de géométrie 'se réduit' à une 'question d'algèbre', en vertu duquel aussi une interprétation géométrique est susceptible, en des cas nombreux, de venir éclairer un énoncé algébrique". 1

Or, en algèbre, on chercherait en vain le procédé démonstratif. Du moins cette forme rigoureuse de raisonnement passe-t-elle inaperçue en mathématique moderne.[2] Les équations algébriques ne se fondent pas, en effet, sur des moyens termes; elles s'assimilent, en définitive, à des relations d'identité. Le calcul algébrique, indispensable dans la pratique, ne saurait donc remplacer, au niveau scientifique, la démonstration géométrique. Gonseth proclame, dans une formule limpide, l'insuffisance de la géométrie analytique au point de vue de la science rigoureuse : La géométrie analytique, dit-il, 'remplace la déduction par le calcul'.[3] Pour autant que la mathématique moderne s'identifie

---

1. G. Bouligand, Les Méthodes Mathématiques, p. 5. - "The sort of locus which corresponds to this (viz. in Anal. Geom.) is a straight line, and conversely to every straight line there corresponds an equation of this form. It is fortunate that the simplest among the geometrical loci should correspond to the simplest among the algebraic forms. Indeed, it is this general correspondence of geometrical an algebraic simplicity which gives to the whole subject its power. It springs from the fact that the connexion between geometry and algebra is 'not casual' and 'artificial', but 'deep-seated' and 'essential'". N. Whitehead, An Introduction to Mathematics, p. 89.

2. Voir : Charles De Koninck, The Hollow Universe, p. 7, note 1.

3. F. Gonseth, La Géométrie et le problème de l'espace, p. 18.

avec 'l'art du calcul',[1] dans la même mesure elle bannit la démonstration.

Les considérations précédentes suffiront à guider notre conclusion. Il est maintenant plus facile de savoir s'il existe un lien de continuité entre les conceptions d'Aristote et celles des philosophes modernes sur la nature du continu. On a entendu Poincaré proclamer une distinction radicale entre les deux espèces de continuité : "... Le véritable continu mathématique, affirmait-il, est tout autre chose que celui des physiciens et celui des métaphysiciens". Dans ce texte, le grand mathématicien français souligne, par le fait même, les points de vue différents qui ont animé Aristote et les analystes modernes. Le premier a adopté avant tout la perspective du philosophe (de la nature et du métaphysicien) dans sa définition du continu. Les modernes se sont placés dans une optique strictement mathématique. Ces modes de considération conservent chacun leur valeur; ils ne se contredisent pas. Le point de vue philosophique surtout adopté par Aristote se révèle fondamental et intangible. Il est recevable même de nos jours. S. Thomas en a exploité toute la richesse en théologie. Certaines thèses, et des mieux établies, s'effondreraient avec le rejet de la notion traditionnelle de continu.

La perspective mathématique, de son côté, a produit, comme on l'a répété, des résultats étonnants. Et la fécondité de la géométrie analytique n'est pas encore épuisée.

---

1. Cette identification plus ou moins poussée s'éclairera au chapitre suivant.

Si les points de vue différents d'Aristote et des analystes demeurent légitimes; si, d'un autre côté, les deux positions paraissent exemptes de contradiction, nous est-il permis, en outre, d'entrevoir dans la doctrine aristotélicienne les fondements de la géométrie analytique ? Peut-être si l'on sait faire les distinctions voulues.

Si l'on consulte, d'une part, les 'définitions' du continu et du discret chez Aristote, elles semblent ne pas laisser soupçonner l'existence possible de la géométrie analytique. Ces entités apparaissent comme à jamais irréductibles. Si l'on étudie, au surplus, la théorie aristotélicienne des sciences, on s'aperçoit qu'il est difficile de reconnaître à la géométrie analytique le statut 'scientifique'. La solidité de la position traditionnelle paraît même s'accroitre du fait que "certaines tendances des mathématiques modernes semblent confirmer le dualisme posé par Aristote entre le nombre et la grandeur."[1]

D'un autre côté cependant, l'étroite relation et interaction qu'Aristote[2] et s. Thomas[3] établissent entre le continu et le discret paraît justifier, pour une bonne part, la détermination numérique du continu, arithmétisation qui se pose, encore une fois, au fondement de la géométrie analytique. Les développements de la doctrine aristotélicienne ont, au surplus, apporté des éléments positifs de progrès dans la même ligne : "... Le problème des relations du discret et du continu,

---

1. Th. Greenwood, Art. cit., p. 93.

2. Par ex., Metaph. X, 1052 b 20 - 31.

3. "... Omnis mensuratio, quae est in quantitatibus continuis, aliquo modo derivatur a numero. Et ideo relationes, quae sunt secundum quantitatem continuam, etiam attribuuntur numero." In V Metaph., lect. XVII, n. 1007.

du fini et de l'infini, a préoccupé les penseurs du Moyen âge et de la Renaissance, qui ont fourni des éléments précieux à 'l'élaboration de la géométrie analytique' et du calcul infinitésimal".[1]

Si donc l'arithmétisation du continu peut, à la rigueur, s'intégrer au courant de pensée aristotélicien, le triomphe absolu du nombre sur le continu, victoire enfin remportée par la mathématique contemporaine, paraît se concilier difficilement avec les principes d'Aristote. Le rejet de l'intuition géométrique aurait semblé inconcevable au philosophe grec. Comme on l'a vu, d'ailleurs, certains aspects de la crise moderne des fondements mathématiques semblent bien confirmer, sur ce point, les conceptions anciennes.

---

1. Th. Greenwood, Ibid., p. 50.