Chapitre 3

L'abstraction mathématique

Une question encore plus fondamentale que celle de l'arithmétisation du continu s'offre maintenant à l'étude. Il s'agit du problème de l'abstraction mathématique. Ce concept a subi des transformations décisives au cours des siècles, modifications qui ont en outre influencé une série de domaines étroitement reliés à la notion d'abstraction mathématique. L'objet de ce chapitre consiste tout d'abord à rappeler succinctement la position ancienne sur cette question, puis à la confronter à l'attitude moderne et enfin à tenter d'éclairer quelque peu certains problèmes connexes.

A l'origine, le mot signifiait 'enlever une chose à une autre'. Ainsi, par exemple, supprimer, d'un bloc de marbre, certaines parties de manière à en faire jaillir une image ('Vivos ducent de marmore vultus'. Virgile), constituait une abstraction. Peu à peu, le terme a acquis un sens étendu, servant à désigner toute considération d'un objet selon un point de vue particulier. Une telle attitude implique toujours, en effet, une 'non-considération ou négligence' d'aspects jugés moins utiles à un moment donné. Ainsi, on peut s'arrêter à l'étude d'une figure sans porter attention à sa couleur.

L'abstraction joue un rôle fondamental en science, qu'il s'agisse de l'abstraction totale ou de l'abstraction formelle. La première[1] considère un tout potentiel séparé de ses parties subjectives.

---

1. La notion d'abstraction totale éclairera tout particulièrement le cas de l'abstraction moderne.

Ainsi, dans l'homme et dans la brute, je puis m'arrêter au trait commun 'animal', sans porter attention aux caractères distinctifs de chacun. Cette abstraction selon la généralité est liée au processus de détermination dans les sciences, c'est-à-dire à l'ordre qu'il faut suivre dans la considération des sujets et des principes d'une science en se plaçant au point de vue de l'évidence de ces éléments. L'abstraction totale, bien que commune à toutes les sciences, ne saurait les distinguer. Ce privilège appartient à l'abstraction formelle.[1] Celle-ci cherche à dégager les parties spécifiques ou essentielles des parties accidentelles ou individuelles. Ainsi, laissant de côté les singuliers sensibles, on s'élève jusqu'à l'intelligible en acte pour ne retenir que lui dans sa considération actuelle v.g. le concept d''humanité' au-dessus de Socrate, de Platon, etc. Or ce qui empêche le singulier sensible d'être intelligible en acte, c'est le fait, non pas de sa singularité, mais de sa matérialité.[2] Il s'ensuit que les rapports plus ou moins étroits d'un objet à la matière déterminent de son intelligibilité et, en conséquence, de son degré d'élévation dans la hiérarchie des sciences.

Comme, d'autre part, l'abstraction formelle retient certaines parties pour les poser dans la définition et que celle-ci, à son tour, est principe de la démonstration, ce genre d'abstraction se rattache intimement au processus 'in demonstrando' qui est l'ordre à suivre

---

1. Fondamentalement, cependant, les sciences se distinguent par leur mode de défini : "... Tota ratio divisionis philosophiae sumitur secundum definitionem et modum definiendi". <u>In I De Anima</u>, lect. 2, n. 39.

2. "...Singularium quae sunt in rebus corporalibus, non est intel-

dans la connaissance scientifique d'un sujet donné.[1]

Cette abstraction se retrouve dans toutes les sciences puisqu'elles doivent négliger les parties matérielles pour s'en tenir à l'espèce. Or il arrive que cette dernière implique la matière sensible comme principe essentiel. Celle-ci doit alors intervenir dans la définition. Un tel mode de définir caractérise la philosophie de la nature. La mathématique considère des objets totalement coupés, au point de vue de la définition, de la matière sensible. Bien que la forme mathématique ou quantité ne puisse exister séparée de la matière corporelle, on peut, cependant, la concevoir en dehors de tout rapport actuel à une telle matière. Ce mode de considération, la mathématique ne le partage avec aucune autre science, voilà pourquoi il faut éviter de confondre l'abstraction 'formelle' mathématique avec les autres espèces d'abstractions formelles. Le mode de définir utilisé en mathématique permet d'étudier la quantité et d'en établir les propriétés avec une rigueur jamais atteinte dans aucune autre discipline.

Tel apparaît le mode d'abstraction propre à la mathématique suivant la philosophie des mathématiques traditionnelle. Il s'agit, on le voit, d'une abstraction 'formelle' en un sens bien particulier, abstraction qui s'identifie avec un mode de définir lui-même au principe de démonstrations rigoureuses. Reste à savoir si l'abstraction réalisée dans les mathématiques modernes peut se ramener au modèle ancien ou si,

---

lectus, apud nos, non ratione singularitatis, sed ratione materiae, quae est in eis individuationis principium". Ia, q. 56, a. 1, ad 2.

1. Cf. Charles De Koninck, Introduction à l'étude de l'âme, Préface au Précis de psychologie thomiste de l'abbé Stanislas Cantin, pp. XXVIII ss.

au contraire, ces deux manières de concevoir l'objet mathématique ne se caractérisent pas par des divergences plus ou moins profondes.

Il est bon de remarquer, au départ, que les philosophes des mathématiques modernes situent eux aussi le problème de l'abstraction au centre de leur science : "...L'abstraction, écrit justement Bell, fut l'un des principaux signaux de ralliement des mathématiques telles qu'elles se sont développées dans la première partie du XXe siècle".[1] Dans une langue figurée, F. Le Lionnais exprime une idée semblable : "La Mathématique, dit-il, n'est-elle pas l'alambic où se distillent les abstractions les plus quintessenciées ?"[2] Il est cependant permis de s'interroger sur le sens que revêt le mot 'abstraction' sous la plume d'un moderne. Comporte-t-il la signification restreinte qu'Aristote lui attribue ? Il ne semble pas, puisque la majorité de ces philosophes rejette la quantité comme sujet des mathématiques. Que visent-ils alors à exprimer quand ils emploient le mot 'abstraction' ? Ce terme s'identifie pour eux avec une 'généralisation' toujours plus large.[3]

---

1. E. T. Bell, La Mathématique, reine et servante des sciences, p. 152.

2. Les Grands Courants de la Pensée Mathématique, p. 15.

3. E. T. Bell, Ibid., pp. 32-33. - Cf. Richardson, Fundamentals of Mathematics, pp. 39-40. - Pour cet auteur, le mode de considération mathématique se caractérise par le fait de réunir les nombres (objets nombrés) dans une 'qualité commune' et de faire abstraction des autres propriétés.

La généralisation moderne, comme on le verra plus en détail, s'opère à un point de vue bien précis, sous une formalité bien distincte, à savoir : la perspective du pur calcul. Entreront dans la considération mathématique tous les objets susceptibles de subir le traitement du calcul, quelle que soit d'ailleurs leur nature.

Et celle-ci se retrouve en géométrie aussi bien qu'en algèbre.[1] Ce genre d'abstraction apparaît, en outre, comme le plus étendu[2] dans cette science exacte et aussi comme la principale condition du progrès mathématique.[3]

Mais en quoi consiste, au juste, cette 'abstraction selon la généralité' ? Ne pourrait-on pas l'assimiler à l'abstraction 'totale' des Scolastiques telle que décrite plus haut ? Il importe d'éclairer ce point dont dépend la notion même des mathématiques récentes.

Pour jeter quelque lumière sur ce problème, il nous faut rappeler très succinctement la pensée aristotélicienne sur le rôle de l'homogénéité en mathématiques.[4] Comme on s'en souvient, le continu, d'après sa double définition, se caractérise par la plus stricte homogénéité des parties par rapport au tout. L'unité propre au nombre ressort avec moins d'évidence, mais elle est requise avec autant de ri-

---

1. "En géométrie, le processus d'abstraction suivit le même plan général qu'en algèbre. Les concepts fondamentaux furent formulés à nouveau en termes abstraits... (Il en résulta) une théorie de l'espace abstrait... (On appliqua) cette théorie à une généralisation d'un pan entier de l'analyse classique, le calcul infinitésimal et ses nombreux rejets". E. T. Bell, Ibid., p. 148.

2. "Mathematics is the science of the most complete abstraction the human mind can attain". A. N. Whitehead, Science and the Modern World, p. 44. - Cf. The World of Mathematics, pp. 407 ss. - "Issues de la réalité (avec laquelle elles peuvent relâcher plus ou moins leur contact, à condition de ne jamais le perdre définitivement) les mathématiques sont devenues la plus abstraites des sciences". F. Le Lionnais, Op. cit.

3. The World of Mathematics, p. 410.

4. Cf. Partie I, section II, ch. 5.

gueur pour assurer l'authenticité de la science mathématique. Pour les anciens, en effet, l'arithmétique ne s'appliquait qu'au multiple mesuré par l'un.[1] Cette mesure commune exigeait, d'autre part, une parfaite homogénéité des éléments intégrants. Dans un tel système, le nombre apparaissait, en outre, comme strictement définissable; aussi pouvait-il être signifié par un 'nom' qui, toujours, exprime une nature déterminée. Ainsi, le signe '3', quand il sert à désigner le nombre prédicamental, se présente comme un substitut commode du nom 'trois'. Il convient de noter, au surplus, que l'unité exigée par le multiple quantitatif doit être actuelle et non seulement virtuelle. Dès lors, le 'deux', nombre prédicamental, sera une seule fois 'deux' et non pas deux fois 'un' : "Oportet enim quod vel dualitas non sit unum quid, sive quicumque alius numerus; sive quod unitas non sit actu in ea. Et sic dualitas non erunt duae unitates, sed aliquid ex duabus unitatibus compositum. Aliter numerus non esset unum per se et vere, sed per accidens, sicut quae coacervantur".[2] Cette unité 'formelle' de la quantité numérique ne saurait se concilier avec la communauté qu'on trouve, par exemple, sur le plan de l'analogie. Rappelons enfin que le nombre mathématique se tient à 'un niveau d'abstraction bien déterminé' : il néglige la matière sensible des éléments considérés sans toutefois ignorer leur homogénéité sur le plan numérique.

Le genre d'unité numérique réalisée dans les mathématiques

---

1. C'est-à-dire au nombre un 'par soi'. Contrairement au pur calcul, le nombre ainsi envisagé ne peut faire abstraction des choses auxquelles il s'applique.

2. S. Th., in VII Metaph., lect. 13, n. 1589.

modernes diffère profondément de celui qu'on vient de décrire. Ces divergences sont imputables, comme on le sait déjà, au mode d'abstraction propre aux mathématiques contemporaines.

En effet, puisque, dans ce domaine, 'abstraction' est synonyme de 'généralisation', une totale 'indifférence' à la nature des objets mathématiques caractérise le mode de considération du mathématicien moderne. Ainsi, d'après J. Hadamard, la parole de B. Russell selon laquelle "les mathématiques sont la seule science où l'on ne sait jamais 'de quoi' l'on parle, ni si ce que l'on dit est vrai", illustre bien le fait de l'abstraction mathématique. Celle-ci se trouve encore heureusement exprimée, ajoute le célèbre mathématicien français, par cette autre définition : "Les Mathématiques sont l'art de donner le 'même nom' à des 'choses différentes'".[1] Verriest, de son côté, décrit l'algèbre moderne comme l'étude d'opérations déterminées ou indéterminées sur des 'objets non déterminés'.[2] Pour Whitehead, enfin, ce champion de l''abstraction' moderne le traitement mathématique s'applique à tout sans égard aux divergences de natures des objets intéressés :

> "Now the first noticeable fact about arithmetic is that it applies to 'everything...' The 'nature of things' is 'perfectly indifferent'... Thus we write down as the leading characteristic of

---

1. Encyclopédie Française, I, 1·52-2-3.

2. G. Verriest, Les Nombres et les Espaces, p. 126. - Quant à la géométrie 'formaliste', elle se présente comme un édifice logique dont les matériaux sont le point, la droite et le plan. Or, il n'est nullement nécessaire de savoir ce que 'sont' ces matériaux, il suffit d'en connaître l'usage. *Ibid.*, p. 173.

> mathematics that it deals with properties and ideas which are applicable to things 'just because they are things... This is what is meant by calling mathematics 'an abstract science'". 1

L'une des conditions fondamentales qui assurent la possibilité de la 'généralisation moderne', c'est le pouvoir d'établir des 'relations' entre les objets et d'utiliser ces rapports pour eux-mêmes. Dans un texte déjà cité, Poincaré s'exprime sans ambiguité sur ce point :

> "Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des 'relations' entre les objets; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets; par d'autres, 'pourvu que les relations ne changent pas'. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse". 2

---

1. An Introduction to Mathematics, pp. 2-3. - "Mathematics as a science commenced when first someone, probably a Greek, proved propositions about 'any' things or about 'some' things, without specifications of definite particular things". Ibid., p. 7. - Etiam : Ibid., pp. 8, 106, etc. - E. Borel décrit l'apparition des conceptions formalistes en mathématique par ce qu'il appelle 'un degré d'abstraction nouveau', puisque l'on étudiait de plus en plus des formes 'indépendamment de tout contenu', et dont on pouvait même se demander si elles 'avaient ou non un contenu' . L'Imaginaire et le Réel en Mathématiques et en Physique, p. 112. - Dans les mathématiques modernes, remarque Beth, il y a tendance à la généralisation qui permet de soumettre des 'systèmes essentiellement différents' à des 'considérations d'ordre général'. Les Fondements logiques des Mathématiques, p. 13. - Les témoignages des mathématiciens les plus éminents concordent sur ce point. Il faudrait tous les citer. On peut consulter, entre autres, G. Bouligand, Les Méthodes Mathématiques, pp. 44-45; Courant and Robbins, What is Mathematics, p. 70, etc. - James R. Newman, The World of Mathematics, passim; etc.

2. La Science et l'Hypothèse, p. 32. - "The mathematics of the 20th century differs chiefly from that of the 19th in two significant respects. The first is the deliberate pursuit of abstractness, in which 'relations, not things related', are

Cette tendance de la philosophie mathématique contemporaine, bien loin de subir une régression, s'accroît au contraire à un rythme accéléré : "De plus en plus, écrit Borel, les mathématiques apparaissent comme la science qui étudie les 'relations' entre certains êtres abstraits 'définis d'une manière arbitraire', sous la seule condition que ces définitions n'entraînent pas de contradiction".[1]

Ainsi donc, la 'relation' entre les objets mathématiques quelconques se substitue à leur 'nature' et devient 'principe d'unité'.

---

the important element..." E. T. Bell, The Development of Mathematics, p. 243. - "We have here (General Definition of Irrational numbers by Nested Intervals) a typical instance of the philosophical position described in the introduction to this book; to discard the naive 'realistic' approach that regards a mathematical object as a 'thing in itself' of which we humbly investigate the properties, and instead to realize that the only relevant existence of mathematical objects lies in their mathematical properties and in 'the relations by which they are interconnected'. These relations and properties exhaust the possible aspects under which an object can enter the realm of mathematical activity." Courant and Robbins, What is Mathematics, p. 70. - L'essence même de l'être mathématique réside dans la relation; et le nombre, en particulier, se définirait en termes d'ordre et de position : "What is expressed here is just this : that there is a system of ideal objects whose 'whole content is exhausted in their mutual relations'. The essence of the numbers is completely expressed in their 'position' (D'après le système de Dedekind sur le nombre ordinal). And the concept of position must first of all, be grasped in its greatest logical universality and scope". Ernst Cassirer, Substance and Function, p. 39.

1. F. Le Lionnais, Les Grands Courants de la Pensée Mathématique, p. 24.

D'autres concepts encore plus généraux, on s'en rendra bientôt compte, viennent, à leur tour, remplir un 'rôle d'unification' entre les êtres mathématiques. Mais toujours l'homogénéité de nature de ces entités, parce que trop restrictive, est jugée inapte à devenir principe d'unité. En somme la philosophie mathématique moderne se contente d'une homogénéité 'à caractère négatif'; s'assemblent sous une classification identique tous les objets susceptibles de subir un 'traitement semblable',[1] peu importe la diversité de leur essence ou de leurs propriétés. Cette unité 'indifférenciée' dont se satisfont les modernes manifeste à quel point l'abstraction mathématique d'aujourd'hui diffère de l'abstraction 'formelle' telle qu'enseignée par Aristote. Comme on l'a souligné précédemment, la mathématique ancienne avait un objet bien déterminé : la quantité abstraite. Rien n'entrait dans le domaine mathématique que sous cette formalité bien définie. La tendance moderne à une généralisation toujours plus large ne saurait s'accommoder de cadres aussi étroits. Voilà pourquoi l'abstraction moderne présenterait quelque analogie (lointaine sans doute) avec l'abstraction 'totale' décrite ci-dessus. Il faut toutefois éviter de pousser trop loin la comparaison,

1. Ce 'traitement semblable' sera précisé plus loin. Il importe ici de souligner le point de vue négatif de l'abstraction moderne.

car ce mode de considération implique un universel qui a des inférieurs dont il peut être prédiqué. De plus on a toujours affaire, dans ce cas, à des natures essentiellement unes. Les mathématiques modernes ignorent les natures; un objet peut en remplacer un autre sans affecter la suite des opérations.

Aussi rien d'étonnant que le concept de 'classe' se substitue à celui 'd'universel' dans un tel contexte et que le 'symbole' remplace le 'nom'. Bien que dans le cas de l'universel l'on observe une certaine 'classe', savoir : les parties subjectives, ces deux concepts ne sauraient s'identifier. L'universel, en effet, ne signifie pas en premier lieu les individus, mais la 'notion' dans son appartenance à l'individu. On accorde alors la primauté à l''un' et non pas au 'multiple'. La classe vise d'abord ce qui est distribué, c'est-à-dire la collection comme telle. En conséquence, l'unité propre à l'universel[1] dérive de sa définition même; cette unité apparaît comme 'intrinsèque', naturelle à ce concept général; elle résulte de ses principes essentiels. Voilà pourquoi le nom, qui signifie toujours une nature unique et déterminée, convient pour désigner l'universel. Dans le cas

---

1. Il s'agit ici de l'universel prédicable, c'est-à-dire de l'universel 'en tant qu'universel', et en tant que la nature décrite est soumise à l'intention d'universalité. Cf. S. Thomas, <u>In VII Metaph.</u>, lect. 13, n. 1570.

de la classe, le principe d'unité tient souvent de l'arbitraire; du moins apparaît-il toujours comme 'extrinsèque' aux membres de la collection, qui peuvent, encore une fois, présenter la plus grande diversité de natures. Aussi doit-on recourir au 'symbole' pour désigner la classe. Car le symbole signifie la collection comme telle, c'est-à-dire un groupe d'éléments qui retiennent leur diversité actuelle, leur multiplicité irréductible.

Ces brèves considérations sur l'universel prédicable et la classe, sur le nom et le symbole, serviront à éclairer la notion envisagée comme la plus fondamentale par les philosophes des mathématiques modernes, celle de nombre. Selon cette conception, tout, en effet, dans cette science, se réduit maintenant au nombre. Et la manière de le définir affecte, comme il va de soi, l'ensemble des mathématiques contemporaines. Or cette tendance à la généralisation qui caractérise, de nos jours, ces sciences, se manifeste le plus profondément et, pourrait-on dire, en premier lieu, dans la définition du nombre. Comme le fait justement remarquer Poirier[1], la définition du nombre d'Aristote (multiplicité mesurable par l'un)[2] n'est guère possible que pour les

---

1. Le Nombre, p. 78.

2. "During a long period, groups of fishes will have been compared to each other in respect to their multiplicity, and groups of days to each other. But the first man who noticed the analogy between a group of seven fishes and a group of seven days made a notable advance in the history of thought..." A. N. Whitehead, Science and the Modern World, p. 26.

nombres naturels. Et l'extension du concept primitif de nombre a pris une telle ampleur que, de l'avis de Spengler, la notion de nombre, telle que décrite par les philosophes modernes, 'n'a gardé aucune trace du nombre' entendu en son sens 'classique' et 'populaire' : "... There remains not a trace of number in the Classical and popular sense".[1] En effet, dans la conception philosophique actuelle du nombre toutes les différences essentielles s'effacent;[2] on ne retient qu'une sorte d''intention d'objet'[3] sans unité par soi. Ainsi, par exemple, quand

---

1. O. Spengler, Meaning of Numbers, p. 2337.

2. "We think of the number 'five' as applying to appropriate groups of any entities whatsoever - to five fishes, five children, five apples, five days. Thus in considering the relations of the number 'five' to the number 'three', we are thinking of two groups of 'things', one with five members and the other with three members. 'But we are entirely abstracting from any consideration of any particular entities', or even of 'any particular sorts of entities', which go to make up the membership of either of the two groups. We are merely thinking of those relationships between those two groups which are entirely 'independant of the individual essences of any of the members of either group'. This is a very remarkable feat of abstraction; and it must have taken ages for the human race to rise to it". A. N. Whitehead, Science and the Modern World, ch. II, pp. 25-26. Ce chapitre est à lire en entier. - La définition moderne du nombre se ramène à celle d'un symbole. Or cette dernière revient à une simple interprétation du signe; elle consiste à expliquer dans quel sens il faut le prendre et non pas 'ce que' signifie la chose à laquelle il se réfère. Bien loin d'obtenir ainsi une 'définition réelle' de la chose, c'est-à-dire une définition qui en manifeste les principes essentiels, on aboutit, au contraire, à une simple interprétation du signe comme tel. Voir : Charles De Koninck, Random reflections on science and calculation, dans Laval Théologique et Philosophique, vol. 12, 1956, p. 90.

3. "... The number of the archangels can be counted 'just because they are things'". A. N. Whitehead, An Introduction to Mathematics, p. 179. - Dans la conception philosophique des mathématiques modernes, les propriétés 'quantitatives' des objets s'identifient avec les propriétés 'communes' à toutes ces

j'affirme que les éléments de telle collection (d'ailleurs extrêmement disparates, comme un soulier, un cheval, un hameçon, etc.) sont au nombre de 25, je puis distinguer à leur sujet une double unité : l'une qui se réfère au lieu : toutes ces choses sont réunies 'ici', entassées en cet endroit; ce caractère commun leur confère, en effet, une certaine unité; l'autre qui résulte du fait que ces êtres dissemblables sont néanmoins tous des 'objets' et qu'ils s'élèvent au nombre de 25. Dans les deux cas, la raison pour laquelle ces entités forment un tout est extrinsèque à leurs natures. Le fait d'appartenir à un même lieu et celui de jouer le rôle 'd'objet' pour l'esprit qui groupe ces divers éléments en une totalité de 25, n'impliquent, de toute évidence, aucune relation intime avec l'essence de ces entités. En dépit des différences de nature de certaines entités, l'esprit peut donc les assembler sous la formalité 'd'objets' et les présenter comme contenues sous tel ou tel nombre, v.g. 4.[1] C'est justement cette manière tout à fait 'ouverte', 'générale' de considérer le nombre qui apparaît à l'origine du concept de 'classe'. Et les différentes définitions du nombre don-

---

entités. Or les propriétés réellement partagées par tous les objets sont celles qui relèvent de leur qualité même d'objets. Le type particulier d'objet importe peu : "The quantitative properties of objects are those properties of objects which they have in common. But the properties which all objects have in common can be only those properties which belong to them as 'objects' merely. The particular type of object is of no concern. This means that mathematics treats those properties which things have 'in virtue of being objects', or to put the matter in another way, those properties 'which determine the possibility of objects'... If we consider all the definitions (of Mathematics) given in Chapter two and the list of concepts in those definitions, it will be evident that they all either involve elements of the theoretical structure or of 'properties of objects as such'". L. O. Kattsoff, Op. cit., pp. 22-23.

1. Cf. Charles De Koninck, Noms et Symboles, texte philosophique de Laval, no 975, Doyon, Québec, 1955.

nées par Russell, par ex., deviennent, dès lors, faciles à comprendre. On réalise mieux, en effet, comment le nombre peut se concevoir comme une 'façon d'assembler des collections' : "... It is clear that number is a way of bringing together certain collections, namely those that have a given number of terms".[1] Si cette définition est juste au point de vue du pur calcul, l'explication que Russell propose de sa formule nous montre qu'elle ne saurait convenir pour désigner l'essence même du nombre. Supposons, en effet, poursuit Russell, tous les 'couples' réunis dans un même groupe (bundle), les 'trios' dans un autre groupement, et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi des ensembles variés de collections constituées d'un certain nombre de termes. Chaque groupe forme une classe dont les membres sont des collections, c'est-à-dire des classes. Ainsi, chaque ensemble constitue une classe de classes. La collection des 'couples', par exemple, apparaît comme une classe de classes en ce sens que chaque 'couple' forme une classe de 'deux' membres, et la collection des 'couples' réalise une classe d'un nombre infini de membres, dont chacun est une classe de 'deux' membres. Comme il est évident, d'autre part, que deux classes finies ne comportent le même nombre de termes que si elles sont 'semblables', le nombre d'une classe pourra encore se définir comme 'la classe de toutes les classes qui lui sont semblables' : "The number of a class is the class of all those classes that are similar to it".[2] Ainsi, le nombre d'un

---

1. B. Russell, Definition of Number, p. 539.

2. B. Russell, Ibid., p. 542. - Voir une courte critique de la définition de Russell dans R. Poirier, Le Nombre, pp. 105-106. "De loin, écrit, de son côté, Brunschvicg, la notion de nombre

'couple' sera la classe de tous les couples. En fait, le nombre 2 'est' la classe de tous les couples. La définition du nombre formulée par Russell illustre une tendance tout à fait générale des philosophes modernes à envisager le nombre sous une optique fort commune et dans la perspective du pur calcul. C'est un tel mode de considération qui permet de réunir sous un même symbole numérique des objets de nature différentes. Il arrive, en effet, qu'il faille désigner par un nombre des entités hétérogènes, comme, par exemple, un ensemble d'objets disparates entassés dans une chambre. Ce nombre-agrégat relève du pur calcul, de la simple numération, de l'acte de compter. L'unité caractéristique de ce nombre résulte des opérations d'addition, de multiplication, de soustraction ou de division qu'on effectue à son sujet. L'unité de nature des êtres nombrés disparaît, devant l'unité artificielle que le concept symbolique leur communique.[1] C'est ce genre de nombre qui est défini par Russell comme la classe des classes, etc.

La classe de Russell n'est 'nulle part', elle est une 'pure fiction logique',[2] une manière d'assembler des objets 'de l'ex-

---

semblait s'apparenter à la notion de 'classe';'de près', les détours et les artifices auxquels la logistique a dû recourir, décèlent une 'incompatibilité de nature'." Les Etapes de la Philosophie Mathématique, p. 406. - Dans la perspective d'une 'définition essentielle' du nombre, la remarque de Brunschvicg est sans doute fondée; il n'empêche cependant que la conception philosophique moderne sur ce sujet s'identifie bien avec celle de Russell.

1. Voir : Charles De Koninck, Random Reflections on Science and Calculation, dans Laval Théologique et Philosophique, vol. 12, 1956. Tout ce chapitre s'inspire de cet excellent article.

2. L'expression qu'Oswald Spengler applique aux 'nombres-surfaces' de la théorie des fonctions peut s'étendre à tout nombre envisagé selon la perspective moderne : "These number-surfaces... are 'pure thought-pictures'". Meaning of Number, p. 2337.

térieur'. Aucune 'mesure commune' n'apparaît, en effet, dans un tel nombre. Car celle-ci postule, on l'a montré, l'homogénéité des éléments intégrants.

Seul le symbole peut servir à désigner cet agrégat[1] sans unité essentielle que constitue le nombre moderne tel qu'on en parle en philosophie des mathématiques modernes;[2] car le calcul ignore la

---

1. Les termes 'classe' et 'agrégat' sont synonymes dans les définitions modernes du nombre. Pour Haudsdoff, l'agrégat est 'une pluralité conçue comme une unité'. Ainsi n'importe quels objets (e.g. poire, crayon, papier, peinture) envisagée comme formant une unité constituent un 'agrégat'. On le constate, il n'est nullement question ici de l'homogénéité de nature qui communiquerait l'unité au nombre; l'essence n'a rien à voir en ce cas. Seule la 'manière' d'envisager ces entités disparates leur confère l'unité. Les éléments du nombre sont rassemblés 'de l'extérieur'; un lien 'artificiel' les rattache entre eux; le 'concept' devient alors souverain en mathématiques. Au lieu de travailler sur des natures, on ne manipule que des constructions symboliques, des fictions (pure thought-pictures).

   Puisque ce mode de définir s'applique à la notion la plus fondamentale de la mathématique, on peut affirmer que la structure entière de cette science se fonde sur la notion d'agrégat : "The definition of number, as we have seen, rests upon the notion of class, or aggregate. Furthermore, since geometry has been reduced to arithmetic also, and then the theory of integrals has been based upon sets of points (i.e. aggregates), the entire structure of mathematics seems to be based upon the notion of aggregate". L. O. Kattsoff, Op. cit., p. 87. Ce chapitre contient un exposé particulièrement limpide sur le problème qui nous intéresse ici.

2. Comme le remarque G. Bachelard, "il faut prendre les notions mathématiques dans une 'plus grande extension' et une 'moindre compréhension' pour aboutir au progrès mathématique moderne". Le Nouvel esprit scientifique, p. 23. Même idée exprimée un peu plus loin : "Un trait doit (alors) être souligné ici : c'est que la mesure du 'réalisme mathématique' se prend sur l''extension' des notions plutôt que sur leur 'compréhension'". Ibid., p. 24. C'est une autre manière de dire que le 'contenu' des objets de pensée intéresse moins le mathématicien que leur pure multitude quantitative.

distinction entre le 'per se' et le 'per accidens' dans le cas de l'être comme dans celui de l'unité. Que l'esprit transcende cette distinction apparaît dans le fait qu'il peut rassembler les objets les plus disparates. Comme le nom ne saurait convenir pour désigner un tel ensemble, on utilise le symbole. C'est lui qui apporte l'unité aux éléments les plus hétérogènes qu'il soit possible d'imaginer. Le calcul de classes s'applique à de semblables agrégats; tout ce qui entre sous telle collection désignée par un symbole appartient à cette fiction logique concrétisée dans un signe arbitraire.[1] Voilà pourquoi, dans le calcul moderne, les termes 'classe et symbole' se trouvent indissolublement liés : "... Au delà de l'arithmétique élémentaire, dit Brunschvicg, les concepts de la science ne peuvent prétendre à aucune espèce d'objectivité, 'ils n'ont du nombre que le nom'; en réalité, 'ce sont de purs symboles' (Molk, Acta Mathematica, t. VI, p. 3)".[2] Des concepts généraux, tels que ceux de 'non-contradiction', de 'relation', et surtout de pur calcul se substituent au 'realistic approach which consists in believing in the 'thing itself'", comme s'expriment Courant et Robbins.[3] Une de ces sortes de 'lieux' dialectiques char-

---

1. Voir : Charles De Koninck, <u>Art. cit.</u>, p. 96.

2. <u>Op. cit.</u>, p. 361. - "The cardinal number of the class C is thus seen to be the 'symbol' representing the set of all classes that can be put into one-to-one correspondence with C. For example, the number 5 is simply the name, or 'symbol' attached to the set of all the classes, each of which can be put into one-to-one correspondence with the fingers of one hand". Kasner, <u>Mathematics and Imagination</u>, p. 31.

3. <u>Op. cit.</u>

gés de conférer l'unité extrinsèque au concept de nombre est, entre autres, la notion de 'constructibilité'. Elle remplace toute donnée première dans le domaine du nombre et s'approprie la place de l'intuition géométrique.[1] Même le point, cette entité fondamentale, est envisagé comme un simple centre de référence[2] et il est désigné lui aussi par un pur symbole. Bref, tout ce à quoi l'on peut appliquer l'une ou l'autre des quatre opérations du calcul, constitue un nombre.[3]

Pour Aristote, la détermination du sujet des mathématiques relevait, on s'en souvient, de la métaphysique; l'arithmétique et la géométrie présupposaient leurs sujets. De nos jours, le philosophe des mathématiques ne tient pas suffisamment compte du rôle de la métaphysique en ce domaine. Ce qui l'intéresse, ce n'est pas, par exemple, la 'nature' du nombre 4 (une telle considération n'entre jamais dans les opérations de calcul), mais c'est l'usage qu'on en peut faire. Et le nombre 4 se définit en raison même de cette opération.

---

1. "Only (then) will he (viz. the man of the street) be able to carry out the second step, the step of abstraction where intuitive ideas are replaced by purely symbolic construction". Hermann Weyl, The Mathematical Way of Thinking, p. 1834.

2. "We, on the other hand, at bottom, know only the abstract space-element of the point, which can neither be seen, nor measured, nor yet named, but represents simply 'a centre of reference'". O. Spengler, Meaning of Number, p. 2339.

3. "The use of the word 'number' (originally meaning natural number) for these new 'symbols' is 'justified' by the fact that addition and multiplication of these symbols 'obey the same laws that govern the operations' with natural numbers". Courant and Robbins, What is Mathematics, p. 52.

Voilà qui précise le 'mode de définir' des mathématiques modernes et situe le nombre dans le contexte technique que nous lui connaissons. Il apparaît ainsi que, outre le côté négatif qui est celui de la généralité ou indifférence aux natures, l'abstraction moderne comporte un aspect positif, c'est-à-dire, avant tout, la notion de constructibilité[1] qui s'applique aussi bien aux fractions qu'aux nombres entiers. Celles-ci apparaissent, en effet, au terme de certaines opérations, et leurs propriétés ('abstract properties') sont définies par des 'opérations communes'. Définitions générales à caractère négatif, ou plus précisément 'définitions opérationnelles'[2], voilà ce qui caractérise le calcul moderne : "Le progrès de la science (mathématique), écrit Chaslin, a consisté à substituer à des opérations matérielles des opérations pensées, puis des 'opérations symboliques' sur des signes, pensées ou écrites, de telle sorte que certaines d'entre elles deviennent un 'mécanisme'.[3] Pendant ces opérations symboliques,

---

1. Voir : Hermann Weyl, Op. cit., tout l'article. Il montre que les mathématiques construisent leurs objets, leurs axiomes, leurs propositions, etc.

2. Ce type de définition joue, en effet, un rôle de premier plan dans les mathématiques modernes. La définition opérationnelle définit le symbole par son mode de combinaison avec d'autres éléments. Ainsi, le nombre 0 se définit par les deux conditions suivantes : $n + 0 = n$
$n \times 0 = 0$
Kattsoff, après avoir distingué cinq types de définitions mathématiques (nominal, systemic, formal, combinatoric, creative) fait remarquer que "All definitions, we have seen, are 'combinations of symbols'. In each case a new symbol is introduced and related to a group of symbols which have already occurred in the system". A Philosophy of Mathematics, ch. 14, pp. 217-218. N'est-ce pas là reconnaître la primauté de la définition opérationnelle ? - Voir un autre exemple de définition opérationnelle dans l'Encyclopédie Française, 1·60-7 (au paragraphe traitant de la Classe).

3. Charles De Koninck indique, dans un texte limpide, en quel sens

on perd de vue leur signification concrète, c'est-à-dire les opérations réelles que l'on ferait sur les collections".[1] Les nombres ne se définissent plus comme des natures, mais leur être s'épuise dans leur 'rôle fonctionnel'. Dans l'opération du pur calcul, en effet, le nombre 'n'est plus', mais il 'remplit une fonction' semblable à celle qu'on observe, par ex., dans l'équation suivante : $5 + y = 10$. Seul importe ici l'usage du nombre 5 : son genre d'unité demeure indifférent; il se définit tout entier par son opération symbolique.[2] Hermann Weyl présente ainsi le concept philosophique du nombre 'fonctionnel' :

---

l'opération du calcul est 'mécanique' : "...In calculating we do not have to interpret the symbols in the operation itself; which is another way of saying that the operation is purely mechanical. If we had to keep in mind their meaning, as we ought to do when using words, we could get nowhere. The interpretation of the symbols must remain quite extrinsic to the actual operations upon them; we must prescind from symbols as signs, divorcing them altogether from the order of representation, and commit ourselves to do nothing that a machine could not do. In the process, the operations themselves must, as it were, be kept 'outside the mind' and thus, no less than the symbols, drained of any meaning whatsoever. The rules of operation are just as mechanical as the rules we build into a machine... The difficulty of conceiving such utter detachment in sheer computation is inversely proportional to the ease with which the operations can be carried out. And when the arbitrary marks are called 'abstract symbols', the abstraction implied must not be referred to what is and goes on in a mechanical computer, but to the knower who may interpret them. The meaningless symbols are the very opposite of abstraction; they are 'out there' in the same way in which the stuff that the marks are made of is there in the machine. Otherwise, machines could not be made to calculate. For this reason, it has been said that 'in calculation the pen sometimes seems to be more intelligent than the user". Art. cit., pp. 105-106. - Lire aussi, Ibid., p. 107, un paragr. éclairant sur ce sujet.

1. Ph. Chaslin, Essai sur le mécanisme psychologique des opérations de la mathématique pure, p. 203.

2. Charles De Koninck, Art. cit., p. 90.

> "If one wants to speak, all the same, of numbers as concepts or ideal objects, one must at any rate refrain from giving them independent existence; 'their being exhausts itself in the functional role which they play' and their relations of more or less. (They certainly are not concepts in the sense of Aristotle's theory of abstraction". 1

Ces façons d'envisager le nombre caractérisent les positions irréductibles d'Aristote et des auteurs modernes : "One might say that Aristotle thinks in terms of substance and accident, while the functional idea reigns over the formation of mathematical concepts".[2] Dans la perspective du pur calcul, l'attitude moderne se révèle tout à fait légitime et même inévitable. Le calculateur ne peut, en effet, s'engager à définir un nombre en faisant abstraction de la 'manière' dont il s'y prend pour le définir.

D'autre part, par son rejet de la définition stricte ou de la nature universelle, le calcul moderne se coupe la voie à toute possibilité de démonstration. Rien, en réalité, ne peut jouer le rôle de moyen terme dans un système où le concept de classe se substitue à celui d'universel. Si l'intelligence s'arrête au symbole et à ses

---

1. Hermann Weyl, Philosophy of Mathematics and Natural Science, p. 8. Cité par Charles De Koninck, Ibid., p. 91.

2. Hermann Weyl, The Mathematical Way of thinking, p. 1834. - "This idea of function or mapping is certainly one of the most fundamental concepts, which accompanies mathematics at every step in theory and application". Ibid., p. 1832. - La plupart des auteurs modernes souscriraient sans doute à cette affirmation de Weyl qui décrit en termes de 'fonction' ce que d'autres qualifient de 'construction', d'opérations', de 'relations numériques', etc.

superstructures, elle n'atteint aucune nature déterminée et les opérations qui la caractérisent ont disparu : plus de simple appréhension, ni de jugement, ni, a fortiori, de raisonnement dans le calcul moderne. Les opérations spécifiques de ce dernier sont confiées à la machine. Bien plus, leur production se révèle parfois le privilège exclusif de la machine, qui l'emporte de beaucoup en habileté sur l'homme dans cette manipulation vertigineuse des symboles. Sans compter que la rigueur obtenue par l'opération du calcul s'avère, de soi, plus simple que celle de la démonstration. Cependant l'exactitude propre au calcul, l'infaillibilité mécanique des résultats, bien loin d'engager la raison dans son acte spécifique, se ramène à de la pure identité.[1] C'est le triomphe de la tautologie.

Dans les mathématiques anciennes, le calcul 'logismos'[2]

---

1. Le jugement suivant de Goethe, même s'il est d'un poète, s'applique justement à la mathématique moderne : "Mathematics has the completely false reputation of yielding infallible conclusions. Its infallibility is nothing but identity. Two times two is not four, but it is just two times two, and that is what we call four for short. But four is nothing new at all. And thus it goes on and on in its conclusions, except that in the higher formulas the identity fades out of sight". (Cité par Richard Von Mises, from A Study of Human Understanding, Harvard, 1951, et transcrit par Charles De Koninck, Art. cit., p. 95, n. 4.).

2. "Cette science très ordinaire, dis-je, qui distingue les nombres, un, deux, trois, en un mot la science des nombres et le 'calcul'; n'est-elle pas telle que tout art et toute science est forcée d'y recourir ?" Platon, République, VII, 522 c. Les mathématiciens grecs faisaient une distinction entre la science des nombres (l''arithmos', 'arithmêtikê) et l'art de calculer ('logismos', 'logistikê'). C'est sans doute par l'art de calculer que l'éducation commençait. (Note du traducteur). - Le calcul moderne est loin de revêtir la simplicité du calcul ancien. Si, dans l'antiquité, le calcul servait d'introduction à

servait d'instrument[1] à la démonstration proprement dite. De nos jours la mathématique se réduit presque totalement[2] à une question de calcul. Sans vouloir mettre en cause l'efficacité pratique de cette transformation, il faut tout de même se rendre compte que la notion de mathématique se trouve, de la sorte, complètement changée. Et même si l'on parvient, de nos jours, à découvrir certaines propriétés du nombre, il ne s'agit plus de propriétés démontrables au sens aristotélicien. Car, il est impossible d'établir les attributs essentiels sans s'appuyer sur les principes mêmes du nombre.[3] Il faut même étendre à toutes les mathématiques modernes, comme on le soulignait à l'instant, cette hésitation à reconnaître la démonstration syllogistique.

---

la démonstration mathématique, et donc à la connaissance scientifique proprement dite, le calcul moderne suppose, au contraire, pour être maîtrisé, un long entraînement et ainsi, il se situe au terme plutôt qu'au départ de la formation mathématique telle que comprise de nos jours.

1. Une illustration de ce fait se trouve, par exemple, dans une démonstration d'Euclide (<u>Eléments</u>, IX, 24) sur les nombres pairs. La proposition s'énonce comme suit : "Si d'un nombre pair, on soustrait un nombre pair, le reste est un nombre pair". Le calcul simple (une soustraction) qui accompagne cette démonstration diffère beaucoup de la démonstration elle-même. Le calcul 'permet' la démonstration, il ne la 'constitue' pas. Aussi les résultats d'un calcul se distinguent-ils essentiellement de la conclusion d'une démonstration. Voir : Charles De Koninck, <u>Art. cit.</u>, p. 114.

2. "La puissance du calcul, sous diverses espèces, va croissant. C'est pourquoi le champ du calcul est confondu par bien des commentateurs avec le champ intégral de la mathématique". G. Bouligand, <u>La Mathématique et son Unité</u>, p. 257.

3. Les modernes démontrent parfois, au sens strict, certaines propriétés des nombres, mais ils le font sans se rendre compte que le processus de leurs preuves se conforme au mode traditionnel de démontrer. Ainsi, par exemple, la démonstration qu'il n'y a pas de dernier nombre premier reste, même de nos jours.

La science stricte se réalisait, pour Aristote, non pas dans n'importe quelle connaissance vraie, mais dans la démonstration qui s'appuie sur des principes premiers, évidents et cause de la conclusion. Or tous ces termes : 'science', 'démonstration', 'premier', 'manifeste', 'principes', etc., ont totalement changé de signification de nos jours.[1] Il suffit d'ailleurs de lire les philosophes des mathématiques contemporaines pour s'en convaincre.

Avec la notion de 'science' mathématique, le concept de 'certitude' s'est aussi transformé. La 'certitude' se rattache maintenant souvent à des questions d'interprétation. Mais ces idées réapparaîtront au chapitre de la physique mathématique.[2] Il importera alors de savoir si cette science complexe constitue une réplique des sciences moyennes anciennes.

Les quelques développements sur l'abstraction mathématique moderne présentés dans ce chapitre suffiront pour manifester la distance énorme qui la sépare de l'abstraction aristotélicienne. Rien de commun entre ces deux manières de définir un même objet. L'abstraction 'formelle' ancienne, avec son sens si précis, fait contraste avec la tendance moderne à une généralisation de plus en plus large. Ces façons différentes d'abstraire en mathématique influenceront profondément le sens de l'intuition dans cette science, puisque les notions d'abstraction et d'intuition se présentent comme étroitement liées.

---

1. Charles De Koninck, Art. cit., p. 117.

2. Chap. VII.

Chapitre 4

L'intuition mathématique

Le mot 'intuition' a des acceptions fort divergentes. Il importe de les démêler, au départ. Et tout d'abord de dégager le sens le plus ordinaire qu'on prête à ce terme, puis d'envisager ses significations principales en mathématiques.

Le mot 'intuition' garde un lien assez apparent avec son sens étymologique. Il n'a pas trop subi les déformations de l'usage, comme l'ont fait une multitude d'autres termes dont la signification primitive ne saurait nous renseigner sur le sens actuel. Le mot 'intuition' est emprunté au bas latin 'intuitio' qui signifie proprement 'regard'.[1] 'Intuitio' dérive à son tour de 'intueri', regarder ('in', en, dans, et 'tueri', voir), porter ses regards sur, fixer ses regards sur, regarder attentivement.[2] Ce terme évoque donc, par son origine, un contexte strictement 'visuel'. Or, ce qui caractérise la connaissance par l'oeil, c'est à la fois la soudaineté, la spontanéité, la clarté (certitude ou évidence), la netteté des formes et la présence actuelle de l'objet de vision. Ces qualités fondamentales se re-

1. Albert Dauzat, Dictionnaire étymologique de la langue française, au mot 'intuition'.

2. F. Gaffiot, Dictionnaire illustré latin-français, au mot 'intueri'. Pour cet auteur, 'intuitio' signifie : image réfléchie par un miroir. Le sens étymologique est encore apparent à travers cette interprétation, car la 'species' de l'oeil, celle du miroir et celle de l'intelligence s'éclairent l'une l'autre dans l'explication des divers modes de connaissance. Ia, q. 14, a. 5 c.

trouveront, au moins en partie, dans les modes les plus abstraits de l'intuition intellectuelle. Il est impossible de les voir réapparaître intégralement au niveau de la pensée, car l'ascension progressive d'un mot du sensible à l'intelligible s'opère toujours par un abandon plus ou moins complet de son sens primitif. Les caractères de la connaissance visuelle ont, cependant, d'autant plus de chances d'accompagner les actes de la pensée intuitive, que toute une terminologie propre au regard s'applique également à l'intelligence. Ainsi, l'on parle de l''oeil' ou du 'regard pénétrant' de l'intelligence, de la 'lumière' de l'évidence, de la 'vision' béatifique, etc.[1]

Le sens le plus original, l'usage le plus commun du mot intuition, la signification dans laquelle il ne peut être remplacé par aucun autre terme, le tient tout près du contexte étymologique, des données visuelles qu'on vient d'évoquer. En effet, selon son imposition la plus fondamentale, d'après sa signification la plus suivie, ce terme se définirait comme "la 'vue directe' et 'immédiate' d'un objet de pensée 'actuellement présent' à l'esprit et saisi dans sa 'réalité individuelle'".[2] Cette définition laisse transparaître les traits essentiels qui caractérisent l'interprétation étymologique. Elle évoque, en outre, les deux tendances qui se combinent dans l'usage de ce mot : a) l'idée 'd'évidence', de pleine clarté intellectuelle,

---

1. S. Thomas, Ia Pars, q. 67, a. 1, donne des raisons qui justifient un tel langage.

2. A. Lalande, Vocabulaire technique et critique de la philosophie, au mot 'intuition'; sens B).

b) la 'présentation concrète' (par opposition à une vue 'abstraite') de réalité actuellement donnée.[1] Bref, l'intuition se réfère, en premier lieu, aux données de la perception externe et aussi interne. Ces objets fournis par la sensibilité se traduisent, à l'intérieur, par des 'images'. Ce mode d'intuition fondamentale suppose, par conséquent, l'intervention de l'imagination.[2] Pour préciser les caractères de l'intuition mathématique, il importe d'indiquer ici les divers sens du mot 'image'. Lalande[3] signale trois significations complémentaires : (a) Reproduction soit concrète, soit mentale, de ce qui a été perçu par la vue (avec ou sans combinaison nouvelle des éléments qui composent cette image); (b) répétition mentale, généralement affaiblie, d'une sensation précédemment éprouvée; (c) représentation concrète construite par l'activité de l'esprit; combinaisons nouvelles par leurs formes, sinon par leurs éléments, qui résultent de l'imagination créatrice.

En particulier, représentation concrète servant à illustrer une idée abstraite.

Ces définitions réalisent les trois conditions de l'image décrites par S. Thomas[4] et elles s'accordent, en outre, avec la

---

1. A. Lalande, Vocabulaire technique et critique de la philosophie, au mot 'intuition'; sens B).

2. A noter, d'autre part, que d'après une certaine étymologie, l'imagination (phantasia) elle-même tirerait sa signification primitive du sens de la vue, Cf. S. Thomas, In III De Anima, lect. 6, n. 668. Etiam : Gaffiot, op. cit., au mot 'imaginatio' : image, 'vision'.

3. Op. cit.

4. Ia, q. 35, a. 1 c. - S. Thomas définit le 'phantasme' comme

définition de l'imagination proposée par Aristote.[1] L'ébranlement interne qui prolonge l'impression du sens externe appartient à une faculté vivante, donc essentiellement active. Voilà pourquoi, en plus de conserver les 'espèces' reçues de l'extérieur (comme le ferait la cire), elle les recrée à son gré et en forme de nouvelles au moyen de celles déjà existantes. Ce second pouvoir se révèle pratiquement illimité, surtout en mathématiques.

Avant de caractériser davantage l'intuition mathématique, au point de vue de l'origine des notions abstraites et surtout de leur terme, il sera utile, pour notre sujet, de signaler quelques acceptions plus abstraites du mot 'intuition'.

La pensée intuitive, loin de s'en tenir à la saisie de l'individuel, s'élève, au contraire, à un niveau plus intelligible. Alors, de la double caractéristique attribuée à l'intuition première, savoir : l'idée d'évidence et l'aspect présentation sensible, la seconde s'écroule au bénéfice de la clarté. Celle-ci implique naturellement les notes de simplicité, de spontanéité et de certitude de la connaissance. Une seconde imposition du mot 'intuition' se décrirait donc comme suit : "Connaissance soudaine, spontanée, indubitable comme celle que la vue nous donne de la lumière et des formes sensibles, et, par conséquent, indépendance de toute démonstration".[2] Cette définition de Littré doit sa limpidité à l'allusion étymologique qu'il prend soin

---

une similitude des choses sensibles. In III De Anima, XIII, nn. 791 et 794. Cette définition demeure ouverte à tous les développements modernes.

~~1. 'Motus factus a sensu secundum actum'.~~

2. Littré, Dictionnaire de la langue française, au terme 'intuition'.

d'y introduire. La signification primitive d'un mot, parce que plus près du sensible, se présente, en effet, à nous comme un principe de manifestation. Cette deuxième acception du terme 'intuition' s'oppose à la pensée discursive.[1] Cette appréhension intellectuelle pourrait encore se définir comme la connaissance d'une vérité évidente qui sert de principe et de fondement au raisonnement discursif, et qui porte, non seulement sur les choses, mais sur leurs rapports. "Elle s'applique même aux propriétés des nombres, des figures géométriques, en tant qu'on les saisit d'un seul coup d'oeil et sans raisonnement".[2] Une troisième imposition (la dernière qui nous intéresse), souligne avant tout les concepts de spontanéité et de certitude dans la saisie intellectuelle. Cette 'intuition' se caractérise par la "sûreté et la rapidité du jugement; divination instinctive (des faits ou des rapports abstraits). Ce sentiment, cette intuition de l'ordre mathématique qui nous fait deviner des harmonies et des relations cachées..."[3] On pourrait encore relever plusieurs sens du mot 'intuition', par exemple, les significations artistique, religieuse, magique, etc. On se rendrait compte alors que toutes ces acceptions ont mis en valeur l'un ou l'autre des traits observés dans le sens le plus fondamental. Seules cependant les trois impositions rappelées s'imposent pour les fins de la présente étude. La fusion de ces trois sens semble particulièrement

---

1. Aristote opposait aussi la 'noêsis', pensée intuitive (v.g. Met., 1016 b 1) à la 'dianoïa', pensée discursive.

2. Lalande, Op. cit., Ibid.

3. H. Poincaré, Science et Méthode, p. 47.

fréquente quand il s'agit d'objets géométriques. La représentation imaginative des figures nous tient sur le plan de l'individuel (1er sens); les démonstrations en géométrie font appel aux notions de 'principes', et de 'rapports' (2e sens) et elles exercent le pouvoir d'invention (3e sens) : "C'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente... La faculté qui nous apprend à voir, c'est l'intuition; sans elle la géométrie serait comme un écrivain ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées".[1] Il s'agit maintenant de voir comment l'intuition telle que définie ci-dessus s'applique à la mathématique en général. Il importe, en d'autres termes, de caractériser l'imagination mathématique et de comparer à ce point de vue les opinions ancienne et moderne. Au terme de cette étude, il sera possible de constater s'il convient encore de parler de connaissance intuitive dans la nouvelle philosophie des mathématiques.

A aucun moment, on l'a vu, l'intelligence n'a le pouvoir de se libérer des images sensibles dans lesquelles elle contemple tous ses objets, soit à titre de représentation parfaite, soit par mode de négation.[2] Telle apparaît la condition innée de la connaissance humaine. Toute opération de l'intelligence se présente donc comme intuitive, (au premier sens rappelé ci-dessus) à titre plus ou moins prochain. Si donc la pensée même métaphysique, tout en 'niant' le phan-

---

1. H. Poincaré, <u>Science et Méthode</u>, p. 137.

2. Voir : Partie I, Section 2.

tasme, ne peut néanmoins s'en défaire, à plus forte raison la connaissance mathématique se verra-t-elle étroitement liée à l'image, elle qui, par son origine, implique une relation spéciale au concret. Aussi S. Thomas affirme-t-il, dans une formule lapidaire, que la 'vérité' mathématique s'en tient à ce que 'démontre' l'imagination; 'secundum id quod imaginatio demonstrat'. Qu'est-ce à dire ? Comme on l'a noté, à maintes reprises, l'abstraction formelle propre à la mathématique néglige la matière sensible, dans la considération de ses objets, pour ne retenir que la matière intelligible. Celle-ci, dans l'universel, est accessible à la seule intelligence. Sous son état singulier, par contre, elle apparaît dans l'imagination. En conséquence, les jugements mathématiques 'se terminent' dans cette faculté sensible et leur rectitude se trouve 'confirmée' par cette 'possibilité de réalisation' ou d'actualisation dans l'imagination.[1] Une fois le jugement vérifié dans le phantasme, inutile de rechercher un critère de validité

1. En d'autres termes, le 'jugement notionnel' doit coincider avec les attributs de la 'figure imaginée'. C'est le sens que revêt le 'demonstrare' de s. Thomas. Suivant une étymologie dont l'authenticité importe peu pour notre sujet, 'demonstrare' se référerait à une désignation concrète et numérique; selon sa première imposition, il signifierait 'montrer du doigt' ('digito monstrare'). (Cf. D. Alb., Top., I, tr. I, cap. 1). Ce que l'imagination 'démontre' ou 'montre' ainsi, c'est l'individu mathématique ou matière intelligible individuelle : tel cercle, tel triangle, etc. C'est cet objet désigné, c'est-à-dire présent 'hic' et 'nunc' dans l'imagination qui 'termine' le jugement mathématique, c'est-à-dire qui témoigne de sa justesse. Si une telle reconstruction se révélait impossible, il faudrait reviser le système. Car, encore une fois, l'absence de toute contradiction latente dans les principes est certifiée par la constructibilité du continu dans l'imagination : 'Ab actu ad posse valet consecutio'; à l'exactitude théorique du jugement mathématique euclidien doit pouvoir répondre une construction dans l'intui-

ultérieur; on peut seulement alors procéder à une formulation plus abstraite du jugement mathématique.

Il est toutefois permis de s'interroger sur le 'pourquoi' d'une telle vérification intuitive dans ces sciences exactes. Les généralisations métaphysiques n'exigent point, au préalable, un tel retour au singulier; pourquoi ce mouvement vers l'image s'impose-t-il en mathématiques ? Pour deux raisons, semble-t-il. Tout d'abord, à cause de la nature de l'objet mathématique, puis par motif de certitude.

On l'a maintes fois répété, au cours des chapitres précédents, le premier objet de l'abstraction mathématique, c'est une forme quantifiée dépouillée des qualités sensibles. Or la figure mathématique ou quantité continue abstraite de la matière corporelle implique extension spatiale, parce qu'elle suppose la relation de parties uniformes extérieures les unes aux autres. Ainsi, le schème bien articulé de tel triangle équilatéral manifeste à la fois une parfaite homogénéité (angles de même ouverture et côtés égaux) et une réelle multiplicité (distinction numérique des angles entre eux et des côtés entre eux). Ce qui 'situe' les angles, par exemple, les uns en dehors des

---

tion imaginative. Une notion ainsi donnée en fait ne dissimule aucune impossibilité. Evidemment une exigence aussi précise de la connaissance mathématique n'est pas toujours directement réalisable, comme on le constatera surtout dans le cas des mathématiques modernes; mais elle doit pouvoir l'être par réduction plus ou moins lointaine. S. Thomas expliquait la connaissance mathématique, dans son fondement même, et il demeurait à l'intérieur du système euclidien. Mais il ne récusait pas d'avance la possibilité d'élaborations plus abstraites. Celles-ci, cependant ne peuvent jamais ignorer les conditions originelles de leurs objets, car dans les choses ordonnées, il serait vain de vouloir éliminer le fondement.

autres et les rend ainsi distincts, ce ne peut être leur 'forme' déterminée par une commune mesure (la forme se révèle ici principe d'homogénéité et non pas d'hétérogénéité), mais bien leur matière, c'est-à-dire le continu, l'étendue spatiale selon laquelle telle partie (dans l'espèce, tel angle) apparaît avant celle-ci et après celle-là. C'est donc en vertu de leur position ('situs' vel 'positio') que des angles de forme identique peuvent se différencier. En d'autres termes, si on veut les distinguer, il faut les saisir non pas comme superposés et confondus, mais comme différemment situés les uns par rapport aux autres. Or, seule l'imagination permet une telle représentation singulière où l'homogène se mêle à l'hétérogène. Car dans l'universel, toutes les figures de même espèce se confondent dans une définition unique. En mathématiques, comme dans la connaissance du singulier matériel par l'intelligence, l'imagination coopère à la saisie des objets individuels. La comparaison des deux modes d'appréhension mérite d'être rappelée. L'esprit atteint le singulier matériel selon un certain mode réflexif. L'intelligence en possession d'une nature universelle prend conscience de son acte, puis de l'espèce qui en est le principe, et enfin du phantasme d'où la forme intelligible a été tirée. C'est ainsi que l'intelligence atteint, à sa façon, l'individu sensible. Manière fort déficiente, il va sans dire. L'imagination, en effet, totalement assujettie aux impulsions du sens externe, transmet comme elle le peut le message toujours mobile, fluent, changeant qu'elle reçoit de l'extérieur. Dans ce cas, l'imagination joue le rôle de simple transmetteur de schèmes plus ou moins précis à l'intelligence. D'aucune manière, celle-ci ne peut pénétrer directement le singulier matériel. Sa connaissance se termine néanmoins à ce dernier, mais à travers des images forcément confuses, imparfaites, en raison de la contingence intrinsèque de la matière sensible.

En mathématiques, les choses diffèrent. Alors que, dans la connaissance du singulier matériel par l'intelligence, l'imagination doit se conformer à des données toujours changeantes; alors qu'elle dépend totalement, dans un tel processus, de la perfection fort relative du sens externe, l'imagination mathématique opère, au contraire, sur 'son propre plan'. Ses schèmes se présentent comme beaucoup plus 'dépouillés', plus 'purs', moins 'chargés' et par suite plus autonomes. Au lieu du complexe si nuancé des qualités sensibles, l'imagination mathématique reforme, à son niveau, les impressions plus ou moins lointaines reçues surtout du sens de la vue. Alors, l'image reconstituée à cette distance du contexte sensoriel se compose des seuls éléments représentables à la limite, pour ainsi dire, savoir : le continu ou l'extension spatiale sans relation aux modèles physiques toujours défectueux par quelque côté. L'imagination mathématique corrige, tout en restant fidèle à son rôle, les données originelles de la sensation et n'en retient que l'élément fondamental, l'élément quantitatif.
Des multiples cercles physiques entrevus, l'imagination tire un ou des schèmes unifiés, aux lignes pures et parfaites, et sans rapport actuel avec aucune des courbes sensibles. Ce qui caractérise, en somme, l'imagination mathématique, ce qui la définit, c'est la 'simplicité' (par opposition à la 'concrétion') de ses représentations : elle se contente du minimum représentable, la quantité : antérieurement à celle-ci, il n'est plus question d'image, car la substance apparaît comme purement

intelligible. En conséquence de leur 'simplicité', les représentations mathématiques se caractérisent encore par leur 'clarté' : elles réalisent une pure répétition du même; elles étalent tous leurs éléments dans une égale limpidité. L'image 'mathématique' comporte encore l'attribut de la 'fixité', de la 'stabilité' ou 'permanence' propre à la quantité immobile. La vérification du jugement mathématique dans le phantasme exige, à toute force, une telle 'solidité' de représentation. On pourrait ajouter aux notes précédentes l'élément de 'perfection' qui accompagne la figure mathématique. Cette propriété se présente comme antérieure, au fond, à l'attribut de 'stabilité'. A quoi, en effet, servirait une image immobile, toujours semblable à elle-même, mais infidèle ! Le triangle, le cercle, la sphère idéals n'admettent aucun défaut de construction. Enfin, signalons comme dernière qualité de la représentation mathématique, 'l'autonomie' ou possibilité illimitée de construction que l'imagination créatrice manifeste. Domaine inépuisable des formes les plus variées, des combinaisons les plus ingénieuses, des nouveautés les plus inattendues. En regard des mathématiques modernes, ce dernier attribut de l'imagination mathématique se révèle peut-être, on le verra, comme le plus important.

Ces diverses qualités de la représentation mathématique manifestent à quel point l'imagination est, pour ainsi dire, la faculté parfaitement adaptée aux exigences de cette discipline. La convergence des sens étymologiques des mots 'intuition ,[1] image, imagination',

---

1. "L'intuition, dans sa signification originelle, est l'appré-

et, en outre, la relation étroite qui existe entre la 'vue', la 'figure' ou 'forme' mathématique et la 'quantité' abstraite, mettent en lumière la même vérité.[1] Si l'on se reporte, en effet, aux premières dérivations respectives des mots 'intuition, image et imagination' signalées au début du présent chapitre, on constate qu'elles se rencontrent toutes dans le sens de la vue. Si, d'autre part, l'on veut bien se ressouvenir que nos représentations de figures ou de formes mathématiques tirent pour la plupart,[2] leur origine des expériences visuelles,[3] on se rend compte à quel point le 'terme' assigné par les anciens aux connaissances géométriques et arithmétiques convient à ces disciplines abstraites. Par là se trouve aussi justifiée l'affirmation selon laquelle les entités de cet ordre présentent pour nous (quoad nos) le maximum d'évidence et en elles-mêmes (quoad se) l'intelligibilité la plus parfaite. Ces notes de la connaissance mathématique

---

hension d'un objet par les 'yeux'. La connaissance mathématique sera intuitive comme est la connaissance sensible, en tant qu'elle portera sur des notions qui s'accompagnent 'd'images'. Ainsi la géométrie telle que les Grecs l'ont constituée, est une science intuitive..." Léon Brunschvicg, Les Etapes de la philosophie mathématique, p. 438.

1. Gauss, un des plus éminents génies mathématiques de tous les temps, appelait la mathématique une 'science de l'oeil'. Cette conviction le portait à surveiller ses textes avec la plus minutieuse attention pour les préserver de toute erreur typographique.

2. Pas dans leur totalité, car la figure est un sensible commun et l'on peut, par exemple, appréhender la forme d'un objet par le sens du toucher.

3. N'est-ce pas par la vue, en effet, qu'on se rend compte, avant tout, des diverses 'dispositions' des 'termes' de la quantité d'un objet. Ces multiples 'configurations' de la quantité physique saisies au moyen du regard, sont transmises à l'imagination qui, dans l'ordre mathématique, reçoit ses schèmes initiaux dépouillés de toute référence à la qualité sensible.

correspondent, en effet, aux qualités de la saisie visuelle; celle-ci se caractérise avant tout, comme on l'a signalé, par la clarté ou netteté des formes appréhendées. De sorte qu'en se plaçant au strict point de vue de l''évidence', ou pourrait affirmer en toute vérité que la connaissance la plus 'intuitive' pour l'homme est celle qu'il réalise en mathématiques.

L'ensemble de ces considérations répond, pour une bonne part, à la raison de 'certitude' invoquée plus haut pour justifier le besoin de vérification du jugement mathématique dans l'imagination. Non seulement, en effet, la 'nature de l'objet mathématique' exige un tel terme, mais la 'certitude' propre à ce genre de savoir motive aussi un retour final de l'intelligence à l'imagination. La certitude implique, en effet, les concepts de fermeté et d'évidence. La première se rapporte à l'objet, la seconde au sujet. La fermeté ou immobilité de l'objet mathématique exige le dépouillement des conditions sensibles, qui sont principes de changement. Or, on l'a vu, les représentations mathématiques réalisent, en fait, la stabilité propre à la quantité abstraite. Quant au concept d'évidence, il comporte aussi une existence privilégiée en mathématiques. Tout d'abord, dans ces sciences, l'objet se tient dans les limites de l'imagination; il ne l'excède point, comme dans le cas de la métaphysique, ni ne dépend des sens inférieurs aux données caduques comme en sciences naturelles. La connaissance sapientiale nous est mal adaptée, en raison précisément de son élévation; la science naturelle, bien que la plus conforme à notre condition humaine,[1] est soumise à toutes les fluctuations de la matière sensible. Seule la matière intelligible revêt pour nous la plus parfaite transparence : elle demeure à notre niveau et se présente tout entière à la fois au regard de l'intelligence dans une totale homogénéité; le continu mathématique réalise une multiplicité uniforme. Voilà, encore une fois, ce qui explique sa clarté.

A noter enfin le rapport qui existe entre la certitude subjective et la connaissance du singulier. Chez nous, l'appréhension de l'individu sensible précède la saisie de l'universel; ainsi en est-il en mathématique; même si, en définitive, c'est l'intelligence qui, par un mouvement de retour, construit dans l'imagination.[2] Et dans les deux domaines, l'influence du 'premier connu' se fait toujours sentir. En d'autres termes, en sciences naturelles, la connaissance qui rassemble, à nos yeux, les plus sûrs critères de validité, est la connaissance du singulier matériel atteint surtout par le sens du toucher. Ainsi en est-il proportionnellement en mathématiques. Les deux modes d'appréhension offrent cependant d'importantes différences. Alors que le singulier matériel comporte une obscurité intrinsèque (on discute encore sur le premier connu de nous !) en raison de

1. In De Trin., q. VI, a. 1, ad Iam quaest., tertio modo...

2. Au fait, l'imagination et l'intelligence sont interdépendantes dans la représentation des individus mathématiques. C'est l'intelligence qui dirige la représentation des singuliers mathématiques; c'est elle aussi qui exige ces constructions pour pouvoir démontrer; elle seule enfin peut 'vérifier' leur nature, i.e. que ces figures sont, par ex., des triangles. D'autre part, si l'imagination disparaissait, l'intelligence perdrait son pouvoir de représenter l'individu. Voir à ce sujet : Charles De Koninck, Abstraction from matter, II, in Laval Théologique et philosophique, vol. XVI, no 1, 1960.

sa matière, l'individu mathématique, à cause de son immobilité essentielle, présente, comme on l'a vu, tous les caractères de la certitude accomplie (fermeté et évidence). La connaissance du singulier matériel peut tromper, nous le savons bien. Voilà pourquoi les sciences naturelles se soumettent sans cesse à des revisions et à des re-vérifications.[1] La connaissance du singulier mathématique ne saurait décevoir pour les motifs déjà signalés. Ce besoin, qui tient au fond même de notre nature, de revenir au singulier, de 'toucher du doigt' (digito monstrare), pour asseoir notre certitude[2] s'exerce au maximum et sans danger d'erreur en mathématiques. Voilà pourquoi le jugement mathématique doit se terminer à ce que 'désigne' l'imagination. Ce principe

---

1. Cette obligation s'impose même de nos jours, pour autant qu'en physique mathématique c'est l'expérience qui, de l'avis même des savants modernes, a le dernier mot. Au temps d'Aristote et de S. Thomas, en raison de l'état rudimentaire de la science naturelle, le sens demeurait l'instrument d'information adéquat; - ce qui n'excluait pas l'usage de certains instruments surtout en astronomie (instruments bien imparfaits, il va sans dire); de nos jours, des instruments scientifiques ultra-perfectionnés, viennent corriger l'impuissance du sens et le 'prolonger' (le qualificatif de 'ultra-sensible' appliqué à certains instruments manifeste bien le rôle univoque de l'instrument par rapport au sens) dans son rôle d'investigation naturelle fort poussée. Mais c'est toujours la 'nature' qui envoie son message à travers le microscope ou le télescope, qui dirige la recherche et suggère au savant des solutions.

2. Cette tendance fondamentale se manifeste même en métaphysique où les généralisations trop osées nous laissent sceptiques. Même dans cette science, de toutes la plus universelle, les mots perdent bientôt tout contenu précis et, en définitive, toute signification réelle, si l'on néglige de revenir à l'imposition antérieure,plus connue, qui est toujours principe de manifestation. L'ascension vers les notions très universelles doit s'opérer progressivement, par paliers et en se rendant compte, si possible, de toutes les étapes de la généralisation. Cette remarque vaut, comme on le verra, pour les mathématiques modernes. D'après le témoignage de mathématiciens de marque,