énoncé par les anciens constitue, répétons-le, un fondement.[1] Et il faut éviter de confondre l'imagination mathématique avec une étroite visualisation. Autrement on ne saurait, en toute rigueur de termes, 'imaginer', par exemple, une ligne mathématique, un polygone à n + 1 côtés, etc. L'imagination mathématique entendue même au sens primitif reste ouverte à des possibilités de constructions et de relations insoupçonnées. Les anciens éléments (de la géométrie, par exemple) se révèlent capables de s'intégrer aux nouveaux et ces derniers s'éclairent à même le processus de leur développement.[2] Un retour périodique aux notions intuitives fondamentales s'impose cependant, comme on le verra avec plus de précision dans la suite, pour assurer la validité des déductions abstraites.

Ce long exposé de la connaissance intuitive dans les mathématiques traditionnelles était inévitable. Avant d'étudier les mathématiques modernes au point de vue de l'intuition, il fallait préci-

---

la crise des fondements, dans ces disciplines, tient, pour une bonne part, à l'oubli de l'humble origine sensible de ces notions abstraites, et tout élan nouveau vers une plus ample généralisation s'accompagne souvent d'une 'reprise de position' sur le plan sensible lui-même.

1. "Au moment où notre étude s'est engagée, écrit Gonseth, l'intuition nous était donnée comme une instance dont rien ne nous permettait de contester ou de relativiser les jugements. Une assertion garantie par l'intuition se présentait à notre esprit comme une assertion valable inconditionnellement. Nous n'aurions pas songé à la mettre en cause... Au point où nous en sommes, la situation est toute différente..." La Géométrie et le Problème de l'espace, VI, p. 69, n. 187.

2. Cf. Harold R. Smart, The Philosophical Presuppositions of Mathematical Logic, pp. 110-111.

ser le sens de ce terme dans les divers genres de connaissances, puis caractériser l'intuition mathématique au sens ordinaire. Reste maintenant à savoir si les mathématiques modernes ont conservé ce mode intuitif dans le processus de leur développement. Rappelons que, dans les lignes qui vont suivre, il faudra entendre, par intuition, la connaissance intellectuelle qui se termine à une représentation imaginative. Une signification plus abstraite interviendra aussi, sans doute, mais moins importante pour notre sujet, parce qu'admise d'emblée de tous, à savoir : la saisie immédiate de principes et de rapports entre les objets mathématiques.

Comme dans les mathématiques traditionnelles, le problème de l'intuition dans les mathématiques modernes présente un double aspect : la question de l'origine de ces notions et celle de leur terme.

Les philosophes des mathématiques modernes s'accordent, en général, pour reconnaître que les objets de leur science tirent leur origine de la connaissance des choses sensibles. D'ailleurs, le philosophe qui tenterait de nier que les sens et l'imagination se situent au départ de l'abstraction mathématique méconnaîtrait et l'histoire des mathématiques et sa propre expérience.[1] Ainsi l'historien démontrerait sans peine que le calcul se présentait au début comme une méthode pour mesurer les surfaces et les volumes limités par des courbes

1. Que la mathématique ne soit pas innée ou une science autocréée, mais que l'expérience sensible en fournisse le point de départ, E. T. Bell le montre amplement en différents endroits de son ouvrage : The Development of Mathematics, pp. 3-13; 144-150; 190 et 194.

ou des surfaces courbes; que l'algèbre impliquait aussi, de son côté, de solides liens empiriques. Un signe qui confirme cette idée sur l'origine des mathématiques réside dans le fait (souligné par un bon nombre d'auteurs) du développement parallèle des mathématiques et des sciences naturelles. Aussi, après une étude attentive de l'évolution des idées mathématiques à travers les âges, Brunschvicg conclut-il : "Que l'arithmétique ou que la géométrie se constituent sur le terrain de l'expérience, cela nous paraît l'évidence même".[1]

Le point de départ empirique des mathématiques se révèle cependant plus apparent en géométrie[2] que dans l'arithmétique; voilà pourquoi admettre un fondement trop éloigné de la sensation paraît plus arbitraire dans la première que dans la seconde :

> "On ne concevrait pas, écrit E. Cartan, une géométrie qui commencerait par dire : 'je considérerai des objets que j'appelle les uns des points, les autres des droites, les troisièmes des plans...' Il est certain que toutes ces propositions ne peuvent nous intéresser que si nous avons des expériences antérieures qui nous fassent saisir d'une manière concrète ce que sont ces objets dont on nous parle sans nous en dire la nature. C'est très bien de définir d'une manière axiomatique, implicite; cela intéresse les géomètres, parce qu'ils ont eu une suite d'expériences, plus ou moins imparfaites, qui les ont conduits à une notion plus ou moins abstraite, la notion de droite. Autrement dit, la géométrie, comme toute science, commence par une 'première période' pendant laquelle on rassemble des 'collections de sensations','d'im-

---

1. Léon Brunschvicg, Les Etapes de la Philosophie mathématique, p. 428.

2. En plus des autres signes, le nom même de 'géométrie' indique l'origine empirique de cette science.

> pressions', on cherche à les ordonner et à établir des lois entre les collections d'impressions..." 1

Riemann lui-même a écrit une thèse pour montrer que la base de notre conception de l'espace est purement empirique et que notre connaissance de ses lois résulte de l'observation.

Mieux encore, de multiples exemples manifestent que la plupart (sinon toutes) des grandes idées de la mathématique moderne tirent leur origine de l'expérience sensible. Non seulement cela, mais le donné concret, en plus d'être source inépuisable d'inspirations[2] en mathématiques, demeure toujours le fondement inaliénable des abstractions les plus hautes.[3] C'est que l'expérience toujours constata-

---

1. Elie Cartan, dans Bulletin de la Société Française, 1934, no 5. - Borel est tout aussi explicite sur l'origine de la géométrie : "La géométrie, dit-il, repose dans son origine historique, sur le postulat de l'existence des 'solides invariables'". L'espace et le temps, p. 7. - "La première condition nécessaire à la création de la géométrie, écrit-il encore, est donc l'existence 'd'objets qui sont immobiles à nos yeux', c'est-à-dire qui restent 'sensiblement invariables' lorsque nous les 'observons à notre échelle'". Ibid., p. 8. - Von Helmholtz parle dans le même sens que Borel : "In conclusion, dit-il, I do not, of course, maintain that mankind first arrived at space-intuitions, in agreement with the axioms of Euclid, by any carefully executed systems of exact measurement. It was rather a 'succession of every-day experiences', especially the perception of the geometrical similarity of great and small bodies, only possible in flat space, that led to the rejection, as impossible, of every geometrical representation at variance with this fact. For this no knowledge of the necessary logical connection between the observed fact of geometrical similarity and the axioms was needed; but only an intuitive apprehension of the typical relations between lines, planes, angles, etc., obtained by numerous and attentive observations..." On the Origin and Significance of Geometrical Axioms, p. 665.
2. "It is undeniable that some of the best inspirations in mathematics - in those parts of it which are as pure mathematics as one can imagine - have come from the natural sciences". John Von Neumann, The Mathematician, p. 2054. - Cf. Ibid., p. 2059.
3. On soutiendra avec raison que ce recours au sensible demeure

ble et contrôlable, s'impose, quoique de loin parfois, pour guider les spéculations les plus hardies : "... Le chercheur va requérir un complexe d'images concrètes d'autant plus riche, que le produit final de son élaboration doit être quelque chose de plus abstrait, de mieux dépouillé des caractères sensibles".[1] Aussi ne faut-il pas chercher le fondement des axiomatiques ailleurs que dans le contexte empirique.[2]

---

accidentel dans une discipline aussi abstraite. Cependant, l'impossibilité pratique d'écarter complètement l'expérience manifeste sans doute que le lien qui rattache ces entités abstraites au contexte sensible n'est pas tout à fait artificiel.

1. Georges Bouligand, Les Méthodes Mathématiques, p. 44. - "La mathématique se développe sans jamais s'achever et son aménagement évolue sans que s'efface le souvenir d''attaches concrètes' qui, au départ de chaque trame de déduction, ont joué un rôle capital. La rupture complète de ces attaches serait dangereuse, vu l'inaptitude d'un système formel à tout synthétiser, et vu le danger de certaines idéalisations dès qu'elles s'écartent des êtres ou classes d'êtres dont nous avons au moins une ébauche". Georges Bouligand, La Mathématique et son Unité, p. 303. - R. Poirier note que "les diverses espèces de nombres sont, et en plusieurs sens, solidaires des 'nombres naturels'. Le Nombre, pp. 80-82. - De même, pour Richardson, "the natural numbers can be considered as the basis for all the numerical portions of mathematics. All the different kinds of numbers introduced can be rigorously defined in terms of the natural numbers..." Fundamentals of Mathematics, p. 117. - Ainsi, les symboles numériques même les plus abstraits se justifient-ils, en définitive, par la numération concrète. Sans ce recours à l''intuition expérimentale', c'est l'abstraction sans fondement, le 'vide absolu'. Cf. A.Rey, Encyclopédie Française, I, Pensée - Langage - Mathématique, 1·16-11.

2. "En construisant une axiomatique, on cherche à ne pas avoir l'air d'utiliser ce que la science qu'on fonde a déjà appris, mais vraiment ce n'est qu'à propos de choses connues qu'on établit une axiomatique". Juvet, La Structure des Nouvelles Théories Physiques, p. 162. - "...A significant or an illuminating insight is rarely obtained by an 'exclusively axiomatic procedure'. 'Constructive thinking, guided by intuition', is the 'true source' of mathematical dynamics.

Ce rôle de l'expérience sensible au principe de la connaissance mathématique, certains l'exagèrent alors que d'autres le minimisent. L'exagèrent tous ceux pour qui les mathématiques s'identifient avec les sciences expérimentales.[1] Pour eux, les objets mathématiques demeurent agglutinés au sensible et ne possèdent donc aucune autonomie réelle. Bien plus, ces mathématiciens ne se rendent pas compte que leur science ne saurait exister à un niveau aussi concret, car une 'mathématique expérimentale' implique contradiction dans les termes. Ceux qui, d'autre part, assignent aux notions mathématiques un point de départ purement logique et arbitraire minimisent le rôle pourtant fondamental de la sensation au principe de cette science que tant de liens rattachent au monde des phénomènes. On verra, au chapitre de la logistique, les principales faiblesses d'une telle position.

Que cette attitude trop formaliste soit cependant explicable chez un philosophe des mathématiques modernes, personne ne le niera : dans les mathématiques avancées, la relation des idées à l'expérience est loin d'être toujours apparente.[2] Aussi n'est-il pas tou-

---

Although the axiomatic form is an ideal, it is a dangerous 'fallacy' to believe that axiomatics constitutes 'the essence of mathematics'". Courant and Robbins, What is Mathematics ? p. 216.

1. "Les mathématiques sont des sciences expérimentales". M. Fréchet, Compte rendu des Entretiens de Zurich, 1938, cité par Jean Desgranges, dans Le Déclin des absolus mathématico-logiques, p. 98.

2. "... The ideas, now in the minds of contemporary mathematicians, lie very remote from any notions which can be immediately

jours possible de donner une preuve simple et convaincante que les mathématiques s'enracinent dans l'expérience. Certaines parties importantes de cette science paraissent si abstraites et inhumaines que si elles satisfont les plus purs des purs mathématiciens, elles laissent sur leur faim ceux qui tentent 'd'expliquer' la provenance de ces entités symboliques.[1]

En dépit de l'abstraction de certaines branches des mathématiques, il faut cependant maintenir, en dernière analyse, leur origine expérimentale; toute autre vue ne saurait, en définitive, se justifier que par un appel à l'idéalisme ou au mysticisme. John von Neumann résume toute cette question en un texte particulièrement clair et il se prononce, à la fin, dans le sens de la thèse défendue ici :

> "It is very hard for any mathematician, dit-il, to believe that all mathematical ideas originate in empirical subjects...There are various important parts of modern mathematics in which the empirical origin is untraceable, or, if traceable, so remote that it is clear that the subject has undergone a complete metamorphosis since it was cut off from its empirical roots. The symbolism of algebra was invented for domestic, mathematical use, but it may be reasonably asserted that it had strong empirical ties. However, modern, 'abstract' algebra has more and more developed into directions which have even fewer empirical connections. The same may be said about topology. And in all these fields the mathematician's subjective criterion of success, of the worth-whileness of his effort

---

derived by perception through the senses; unless indeed it be perception stimulated and guided by antecedent mathematical knowledge". A. N. Whitehead, Science and the Modern World, p. 20.

1. Cf. J. R. Newman, The World of Mathematics, p. 2051.

> is very much self-contained and aesthetical and free (or 'nearly free') of empirical connections".[1]

Sans doute, dans le présent texte, l'auteur insiste-t-il avec raison sur l'énorme distance qui sépare, parfois, les mathématiques de l'expérience, mais à aucun moment il ne nie la dépendance sensible originelle des mathématiques. Ce progrès de plus en plus poussé vers l'abstraction mathématique tient, encore une fois, à la nature même de l'objet de cette science. Mais il sera à jamais impossible d'ignorer son point de départ empirique, puisque, en raison du mode de notre connaissance, nous ne pouvons parvenir à la saisie de la quantité abstraite qu'en prenant tout d'abord conscience de la quantité comme sensible commun. Von Neumann, à la fin du paragraphe cité, approuve implicitement ce jugement en rappelant qu'après un siècle 'd'inutilité' pratique, les abstractions mathématiques les plus quintessenciées "turned out to be very useful in physics".

Les considérations précédentes montrent, semble-t-il, que la thèse moderne sur l'origine sensible des notions mathématiques concorde, pour l'ensemble, avec le point de vue traditionnel. Reste maintenant à envisager l'autre aspect de l'intuition mathématique, à savoir : le 'terme' dans l'imagination : "In mathematicis, affirmait S. Thomas, ad 'imaginationem' et non ad sensum oportet deduci". Ce second aspect de la thèse sur la connaissance mathématique moderne se présente évidemment comme beaucoup plus délicat que le premier. On verra cependant si la proposition de S. Thomas est, sous bénéfice de

---

1. The Mathematician, p. 2060.

précisions inévitables, encore recevable de nos jours.

Pour Aristote, toute connaissance intellectuelle est intuitive, en ce sens qu'elle est liée de plus ou moins loin, sans doute, mais réellement, à l'image sensible d'où la forme intelligible a été tirée. Le mot 'image' doit s'interpréter ici au second sens évoqué plus haut, à savoir comme une "répétition mentale, généralement affaiblie, d'une sensation précédemment éprouvée". Cette définition même ne convient, pour le cas d'une pensée très abstraite, que si l'on entend les termes : 'répétition... affaiblie, etc.' d'une façon très large. Autrement, l'idée la plus 'dépouillée' exigerait l'appui d'une représentation très déterminée au niveau sensible. La pensée humaine se contente, au contraire, parfois d'une image concrète extrêmement vague, sans contour précis et souvent créée de toute pièce par l'imagination. Le prolongement du mouvement du sens dans l'imagination se réalise, en effet, même quand cette dernière crée de nouvelles espèces : elle ne peut alors opérer, en définitive, que sur de l'ancien, c'est-à-dire sur des impressions déjà reçues du sens externe. Ainsi, par exemple, l'idée universelle de 'bonté' se répercuterait dans l'imagination sous forme de représentation vague, confuse à souhait, des 'modèles sensibles de bonté' observés au dehors par le connaissant. Il n'est cependant pas impossible qu'une pensée très dépouillée s'accompagne d'une image particulièrement vive. Mais une telle exactitude n'est pas requise par la thèse générale qui affirme que toute connaissance intellectuelle est 'intuitive'. Au contraire, le concept de représentation confuse répond mieux, en un sens, à la définition d'Aristote de l'imagination comme un 'mouvement' qui prolonge l'impulsion du sens en acte.

Mais alors, dira-t-on, la question de l'intuition mathématique se trouve tranchée : n'est-elle pas englobée dans la loi générale qui relie toute idée abstraite à une représentation sensible ? La connaissance mathématique se révèle plus exigeante que toute autre connaissance abstraite sur le plan de l'intuition imaginative. A ce niveau, en effet, cette dernière joue, comme on l'a rappelé, un rôle de 'vérification', de 'contrôle' plus ou moins lointain de la pensée abstraite. Alors, cette fonction très précise de l'image, au terme de la connaissance mathématique, s'exerce-t-elle même dans ces sciences contemporaines fort évoluées qui paraissent se développer en dehors de tout contexte intuitif ? C'est ce qu'il s'agit maintenant d'étudier.

Comme on l'a constaté ci-dessus, l'ensemble des philosophes modernes admet l'expérience sensible au départ de la connaissance mathématique. Tous s'accordent-ils cependant pour reconnaître un terme intuitif à ce genre de savoir ? L'affirmation fréquente que les mathématiques modernes se sont heureusement émancipées de l'imagination[1] semble refuser à ces sciences une référence quelconque, quant à leur terme, à cette faculté sensible. Comme, cependant, des mathématiciens

1. "L'émancipation des mathématiques de l'imagination sensible produit des résultats tellement précieux que nul mathématicien ne pense à accepter les restrictions que les philosophes voudraient leur imposer". E. W. Beth, L'Existence en Mathématiques, p. 14.

réputés se font les défenseurs du mode de connaissance intuitif, et que d'autres savants l'admettent ou le rejettent suivant la diversité des points de vue, il sera bon de se demander si, tout d'abord, il est possible de nier toute intervention de l'imagination au terme de la connaissance mathématique moderne; puis, si ce genre d'intuition comporte des caractères spécifiques; et enfin, s'il n'y a pas moyen d'interpréter les opinions dissidentes dans le sens de la thèse affirmative.

"While the de-empirization of geometry has gradually progressed since Euclid, écrit Von Neumann, it 'never became quite complete', not even in modern times".[1] Même dans ses états les plus élevés, l'activité mathématique garde une orientation intuitive; la plupart des mathématiciens s'accordent, d'ailleurs, sur ce point : "On admet, en général, dit Poirier, l'existence d'une arithmétique et d'une logique intuitives, sous-jacentes à la construction formelle".[2] Impossible, en effet, de refuser ce qui caractérise notre mode de connaître. Aussi l'imagination intervient-elle dans tout le champ des mathématiques :

> "...Notre intuition naturelle ne peut être contrainte à ne s'exercer que dans un domaine borné, dit Gonseth, La vision de l'espace qu'elle

---

1. The Mathematician, p. 2055.

2. Le Nombre, p. 116. - "Un examen assez rapide du présent fascicule, écrit Bouligand, sera suffisant pour montrer le rôle très large que nous paraît détenir l'intuition, 'même aux étages ultimes de l'activité mathématique'". G. Bouligand, Les méthodes mathématiques, Intr. - "La mathématique ne peut qu'artificiellement, qu'en apparence être détachée de ses fondements intuitifs et de son prolongement dans le réel". F. Gonseth, Les Fondements Mathématiques.

> fait nôtre ne comporte pas de limites. Certes, il ne nous est pas possible de nous en défaire comme d'un simple vêtement ou d'un simple instrument : elle est 'inaliénable'". 1

Voilà pourquoi les schémas les plus utiles, les plus sûrs, sont ceux qui figurent les 'structures' par les 'formes'. Car, en mathématiques, "nous reconstruisons l'expérience non pas avec des idées, dit excellemment Poirier, mais 'avec des architectures symboliques'..."[2] Cette transposition sur le plan du symbole des données naturelles trop 'brutes' rend manifeste comment notre intuition primitive doit être révisée; elle doit l'être en ce sens qu'il faut 'réinterpréter sous une autre forme ce qu'elle nous présente'.[3]

> "L'espace de notre intuition est ainsi conservé en tant que forme inaliénable de notre saisie du monde extérieur, confirmée dans son idonéité relative, mais suspendue quant à ses interprétations trop strictes ou trop lointaines".[4]

Cette conception de l'intuition géométrique est ouverte à tous les développements contemporains, aux manipulations les plus raffinées de l'espace :

---

1. La Géométrie et le Problème de l'Espace, p. 66.
2. Op. cit., p. 175.
3. F. Gonseth, Ibid.
4. Ibid. - "... For the content itself, that is now understood under geometrical 'intuition' has been 'deepened' and 'transformed'". Ernst Cassirer, Substance and Function, p. 77.

> "Nous sommes capables de superposer à notre intuition primaire, en prenant même appui sur elle pour nous en écarter, une vision secondaire de l'espace, faite d'une étoffe intellectuelle plus consciemment tissée, capable de doubler la première sans entrer en désaccord avec elle dans notre horizon naturel mais capable aussi d'en suspendre la valeur et de proposer une autre forme de l'espace, une autre structure de l'étendue". 1

Ainsi, les éléments de l'intuition naturelle, loin de s'appauvrir ou même de disparaître, évoluent, au contraire, dans le sens d'une plus grande précision, d'une souplesse plus efficace, d'une structure plus finement détaillée.[2] Et voilà l'idée d'espace ouverte à une multitude de géométries[3] toutes traduisibles, après des détours plus ou moins laborieux, sans doute, dans la géométrie la plus proche de l'intuition primitive.[4] Et le fait que les géométries non-euclidiennes aient été effectivement ramenées à l'euclidienne[5] constitue un argument décisif

---

1. F. Gonseth, Op. cit., p. 67.

2. Ibid. - "L'intuition géométrique doit sa fécondité au 'dynamisme intellectuel' qui est implicite en elle et qui la rend en réalité 'transintuitive'". Idée de Leibniz rappelée par Léon Brunschvicg, dans Les Etapes de la philosophie mathématique, p. 526.

3. "C'est d'ailleurs une chose extrêmement remarquable, observe M. Buhl, qu'il suffise de légèrement approfondir certains aspects de la géométrie euclidienne pour voir surgir une géométrie et même des géométries beaucoup plus générales". G. Bachelard, op. cit., p. 32.

4. Cf. E. Cassirer, Substance and Function, pp. 109-111.

5. "Les travaux des géomètres modernes, et, en particulier, de Beltrami, permettent d'affirmer qu'en général les propositions établies dans la géométrie euclidienne ont pour corrélatives des propositions de géométrie lobatschewkienne ou de géométrie riemanienne..." L. Brunschvicg, Les Etapes de la Philosophie mathématique, p. 521. - On pourrait facilement multiplier les

en faveur du terme intuitif de toute géométrie. Que le système euclidien soit lui-même exprimable en éléments non-euclidiens[1] n'affaiblit en rien cette position : la géométrie grecque, parce que plus simple[2] et plus proche de l'expérience joue, comme on le verra, un rôle privilégié[3] dans le domaine de la vérification de la connaissance mathématique.

'exemples' (d'ailleurs présentés par les auteurs eux-mêmes) pour justifier toutes ces affirmations. Mais ces illustrations allongeraient démesurément ce chapitre. Il nous est impossible ici de nous en tenir à autre chose qu'à la citation de mathématiciens et de philosophes des mathématiques reconnus.

1. "A diverses reprises, écrit encore Gonseth, nous avons souligné que les géométries non-euclidiennes peuvent se réaliser à l'aide de matériaux euclidiens. On en pourrait donc tirer la conclusion que ces géométries n'ont qu'un domaine de validité inférieur, on pourrait dire 'intérieur', à celui de la géométrie d'Euclide. D'autre part, [nous avons vu que] cette dernière géométrie est un cas limite entre la géométrie hyperbolique et la géométrie elliptique : c'est elle qui maintenant semble avoir un champ restreint de validité. Pour rendre le paradoxe plus apparent, on pourrait facilement construire la géométrie d'Euclide à l'aide de matériaux empruntés à la géométrie de Lobatchevsky, par exemple... Le paradoxe est parfaitement symétrique : de deux quelconques de nos géométries, chacune paraît tour à tour être contenue dans l'autre, ou la contenir. 'Ainsi toute affirmation de la géométrie non-euclidienne est aussi une affirmation de la géométrie d'Euclide'". F. Gonseth, <u>Les fondements des mathématiques</u>, pp. 92-93.

2. "... Il y a lieu de reconnaître à la géométrie usuelle son véritable caractère, qui est de constituer 'le plus simple' des systèmes de géométrie théoriquement possibles, en même temps qu'elle s'accorde avec tous les résultats de l'expérience". P. Barbarin, <u>Géométrie non-euclidienne</u>, p. 13.

3. F. Gonseth montre dans <u>La géométrie et le problème de l'espace</u>, pp. 53-57, que le privilège de l'euclidien ne saurait être nié au point de vue de l'espace, mais qu'il comporte ses limites comme moyen d'exploration, surtout dans l'ordre des dimensions astronomiques.

L'intervention de l'imagination s'observe aussi bien dans les géométries projective, hyperbolique, elliptique et dans la topologie[1] que dans la géométrie d'Euclide. Sans doute s'agit-il dans ces divers cas d'entités différentes,[2] de notions d'espace entièrement nouvelles, mais qui restent fondées pour une bonne part sur l'intuition primitive précisée au sens euclidien. Celle-ci demeure toujours à la base de notre expérience géométrique qui se poursuit avec succès et s'oriente vers une intuition plus haute, plus fine, plus évoluée, moins directement reliée aux schémas originels :

> "C'est en fonction même de l'inaliénabilité de nos vues primitives, écrit encore Gonseth, que nous avons trouvé accès à cette intuition secondaire dont nous avons montré qu'elle pouvait, par ex., nous guider dans l'édification autonome de la géométrie hyperbolique. C'est 'en prenant appui sur l'intuition naturelle primitive que nous avons pu nous en écarter'". 3

---

1. Richard Courant et Herbert Robbins présentent une illustration frappante de l'étroite dépendance de la topologie de l'imagination dans : What is Mathematics, I, pp. 581 ss. Ils font de constants appels à l'imagination : "Let us imagine the given polyhedron to be hollow..." "Imagine a figure such as a sphere...", etc., etc. et manifestent à quel point cette faculté déforme, reforme et transforme les objets mathématiques. - Cf. F. Gonseth, La Géométrie et le problème de l'espace, VI, pp. 40-48. Ainsi, p. 47 : "Pour mieux soutenir l'imagination prenons comme conique une hyperbole...", etc.

2. L'expression euclidien ou non-euclidien "suppose successivement un repérage et une organisation métrique de la multiplicité qui sont indépendants. L'épithète donnée à l'espace n'est qu'une manière de désigner par abstraction les propriétés conventionnelles des figures. Il n'y a donc aucune contradiction entre les diverses géométries, car elles s'appliquent à des objets différents". R. Poirier, Essai sur quelques caractères des notions d'espace et de temps, p. 192.

3. Op. cit., p. 70. - Le rôle naturel de l'intuition "ne pouvait être abandonné... elle s'est 'doublée d'une intuition plus libre, moins étroitement préformée'". Ibid., p. 71.

La construction de géométries nouvelles implique, comme on l'a souligné, non pas le rejet, mais l'éloignement de l'intuition primitive. La méthode axiomatique ne peut, en effet, se suffire à elle-même, ni comme telle, justifier sa propre existence : "... On ne peut sans lui enlever sa signification profonde et sa vie intérieure isoler une science abstraite - fût-ce la mathématique - de ses origines intuitives".[1] Les notions de point, de ligne, de plan, de parallèles, d'angle droit, etc., dans les géométries nouvelles se ressentent nécessairement - quoique de loin, sans doute, mais non moins réellement - des conceptions euclidiennes.

Mais une intuition d'une espèce plus souple, plus évoluée, une fois admise dans les géométries non-euclidiennes, reste pour nous la question capitale de ce chapitre : celle de la 'vérification' de ces données sur le plan de l'imagination : "In mathematicis, ad imaginationem... debemus d duci". Ce jugement se révèle-t-il encore applicable, de nos jours, tout d'abord dans le domaine de la géométrie ? Laissons, de nouveau, Gonseth nous donner la réponse. L'intuition primitive, entendue dans le sens euclidien,

> "reste le fondement de notre vision de l'espace, même quand nous imaginons que le non-euclidien pourrait suppléer l'euclidien... Suivant un circuit qui se recoupe, elle reste même la garantie plus ou moins immédiate et plus ou moins lointaine qui sait s'infléchir aux évidences non-euclidiennes".[2]

---

1. F. Gonseth, Les fondements des mathématiques, pp. 13, 16.

2. La Géométrie et le problème de l'espace, VI, p. 70. Transcrivons le paragraphe lumineux qui fait suite à notre citation :

Ce jugement capital contient tous les éléments de solution de notre problème. Cela revient à dire que l'intuition imaginative devient le garant fondamental de la validité (ou absence de contradiction interne) des géométries euclidiennes et non-euclidiennes, mais pas au même titre. Les conclusions de la géométrie euclidienne trouvent leur vérification 'directe' et leur justification définitive dans la constructibilité du continu dans l'intuition imaginative; les propositions des géométries générales se vérifient, dans cette même intuition, de manière 'indirecte', 'médiate', 'lointaine'; par 'réduction' de leurs objets aux entités euclidiennes. Les objets non-euclidiens s'appuient, en dernière analyse, sur un ensemble de notions constructibles dans l'intuition imaginative; ainsi, la traduction des données générales en multiplicité euclidienne ne présente pas de difficulté. De la sorte, le système euclidien, dont la vérification parfaite s'opère au niveau du continu intuitivement représentable, se révèle, du même coup, le plus propre à justifier les géométries non-euclidiennes.[1] L'esprit a besoin de la sécurité qui résulte de cette traduction des éléments très abstraits en données plus concrètes, bien que, sur le plan strictement déductif, cette réduction ne s'impose pas absolument. Toutefois,

---

"Par l'insistance de notre effort, nous nous sommes donné le spectacle d'une activité mentale qui, s'exerçant dans les conditions de sa propre validité - d'une activité mentale qui ébranle (qui relativise) son propre fondement pour assurer son efficacité, pour rester ouverte à l'éventualité de son propre progrès."

1. Le privilège de l'euclidien consiste "dans la précision avec laquelle les objets géométriques qu'elle nous permet de fabriquer peuvent être comparés les uns aux autres, appliqués les uns sur les autres, etc..." F. Gonseth, Op. cit., p. 54.

le doute naît facilement au sujet de la validité ou cohérence notionnelle d'un système géométrique nouveau.[1] L'exemple de Bolyai en fait foi.

L'ensemble de ces considérations sur le rôle fondamental de l'intuition primitive en géométrie générale manifeste bien que la création des systèmes non-euclidiens, loin d'affaiblir ou de supprimer celui d'Euclide, le raffermit, au contraire, et en démontre la nécessité permanente. C'est en ce sens qu'après une étude sur les géométries non-euclidiennes P. Barbarin conclut :

> "Le résumé et la conclusion de notre travail doivent être un hommage rendu premièrement au génie d'Euclide... deuxièmement aux recherches patientes de Lobatschewsky, Bolyai, Riemann et leurs disciples, recherches qui... ont permis de créer à côté du système usuel deux autres systèmes également admissibles au point de vue de la rigueur logique, d'asseoir sur des bases inébranlables l'édifice de la géométrie générale, et par conséquent enfin 'de consolider définitivement l'oeuvre du géomètre grec'". 2

Si donc l'on se garde d'une interprétation trop restreinte de l'intuition imaginative et si, d'autre part, l'on professe des vues assez larges sur la notion d'espace; si enfin l'on évite de dresser

---

1. "L'introduction d'une notion nouvelle entraîne donc nécessairement une période d'incertitude : dans l'exemple cité (savoir : l'idée d'une géométrie en contradiction avec le postulat des parallèles) cette période d'incertitude a cessé du jour 'où des représentations concrètes nous ont montré la possibilité de prélever des théorèmes non-euclidiens sur la géométrie euclidienne elle-même'". G. Bouligand, Le déclin des absolus mathématico-logiques, p. 168.

2. Op. cit., p. 86.

des barrières infranchissables entre les divers systèmes géométriques, l'exigence générale formulée par S. Thomas : "In mathematicis... ad imaginationem -- debemus deduci", semble bien subsister (avec les modifications prévues) même pour la géométrie moderne.

Le cas de l'arithmétique et de l'algèbre modernes se révèle beaucoup moins simple. Comment parler d'intuition imaginative dans un monde aussi étrangement abstrait ? Comment surtout prétendre que l'imagination impose ses lois dans le domaine de la déduction absolue ? Il faut néanmoins se demander si une certaine intuition imaginative n'intervient pas dans l'algèbre moderne. Dans l'affirmative, il s'agira de la caractériser comparativement à l'intuition invoquée par S. Thomas. Qu'il soit impossible d'éviter le modèle intuitif, même dans les mathématiques les plus évoluées, les philosophes modernes le reconnaissent eux-mêmes. Ils sentent bien qu'à tous les étages de notre connaissance, la partie sensible de notre être (surtout l'imagination) comporte une activité réelle et inévitable.

Ces représentations répondent à un besoin fondamental, à une exigence pratique irrécusable. Voilà ce qu'il faut tenter de montrer pour la partie même la plus abstraite des mathématiques modernes. Pourquoi, en fait, tout ce système de notation symbolique de plus en plus complexe, cet édifice sévère élaboré avec un soin si attentif et sans cesse retouché par des mathématiciens toujours davantage épris de rigueur formelle ? La tendance croissante à la déduction absolue ne devrait-elle pas s'accompagner d'un abandon parallèle d'une masse de signes destinés tout au plus, semble-t-il, à ralentir l'allure de l'argumentation abstraite ? Au contraire. Ces schèmes ténus, ces modèles intuitifs raffinés conditionnent le raisonnement lui-même.[1] Car la relation pure, le discursif absolu apparaissent comme des abstractions vides. Ils portent sur des objets, des faits mathématiques qui, à un certain niveau, semblent n'être donnés que par l'intuition symbolique : "A titre 'd'expérience constatables et contrôlables', tous ces éléments - primordiaux - doivent être retenus".[2] La pensée discursive, en effet, "si elle veut être précise et claire, pour 'celui qui la pense' comme 'pour ceux à qui elle est communiquée', s'appuie toujours en fait sur des signes, des symboles (les mathématiques les plus abstraites en sont un exemple). Ces symboles ne sont pas des images sensibles, concrètes, qualitatives, mais, par la 'nécessité' qui impose d'y recourir, elles n'en constituent pas moins 'quelque chose d'intuitif', au sens de représentatif', en face de la pure relation abstraite.[3] C'est 'l'agencement de ces symboles' qui 'permet

---

1. Le symbole devient une image 'mathématique' en ce sens qu'il apparaît comme le signe d'une variable ou d'une inconnue quelconque qui représente elle-même une collection d'unités de nature très diverse soumises aux opérations du calcul. Voir à ce sujet : Partie I, Section 2, fin du chapitre 5.

2. Abel Rey, Encyclopédie Française, 1·20-5. - "Les représentations mathématiques sont, il est vrai, des symboles déjà fort abstraits, des images fort élaborées, mais il faut reconnaître qu'elles 'jouent un rôle essentiel'". L. B. Guérard Des Lauriers, art. cit., p. 604.

3. Littré serait d'accord sur ce point, lui qui définit la vérité d'intuition comme suit : "Dès qu'il a les idées des choses ou les idées 'attachées aux signes qui les représentent', il voit comme par 'intuition', si une chose 'convient', ou 'ne convient pas' à une autre chose". Op. cit., au mot 'intuition'. Cette définition paraît s'adapter merveilleusement bien à la mathé-

en algèbre et en analyse le progrès de la pensée abstraite'. Sans un système bien organisé de symboles, celle-ci est incapable de pousser bien loin la recherche".[1] Le mathématicien le plus 'formel' ne travaille-t-il pas toujours sur des symboles ? N'expose-t-il pas le résultat de ses recherches au moyen de combinaison de signes qui explicitent, dans une clarté et une rigueur exemplaires, les étapes de son raisonnement ? C'est que le symbolisme mathématique comporte plus d'un mérite. La représentation mathématique, sans épuiser l'objet, "permet de raisonner sur lui; elle le rend en un sens 'plus concret' et 'à portée directe de l'esprit'. C'est ce qui fait sa valeur indé-

---

matique moderne, qui attache une telle importance 'aux signes qui représentent les idées', à une 'notation symbolique' toujours plus ajustée à des concepts hautement abstraits. - "La considération des signes écrits sur une feuille, dit à son tour Blanché, est bien, en un sens, un retour à l'évidence intuitive". R. Blanché, L'Axiomatique, p. 56. - Ici une remarque fondamentale s'impose au sujet de la représentation sensible au niveau de l'imagination. Il importe, en effet, de distinguer un quadruple genre d'images construites à l'occasion de la connaissance mathématique : (a) il y a, tout d'abord, la représentation parfaitement articulée d'une entité facile à saisir, v.g. la figure d'un triangle équilatéral; (b) puis, l'image construite d'une notion très claire aussi, mais pas strictement imaginable à cause, non pas de la nature de l'objet représenté, mais du pouvoir limité de l'imagination; ainsi, l'image d'un polygone d'un milliard de côtés; (c) il y a aussi, la 'construction symbolique', qui joue un rôle si fondamental dans les mathématiques modernes et qui nous introduit dans un domaine beaucoup moins 'intuitif' que les notions précédentes; (d) enfin, apparaît le 'jeu' avec le symbole, la simple 'manipulation' symbolique, qui caractérise le pur calcul et qui peut s'effectuer à l'aide de la machine. Cette dernière catégorie de signes donne encore prise à une certaine intuition, mais on conçoit qu'elle se trouve réduite au minimum. Elle s'impose néanmoins. On verra en quel sens dans la suite du chapitre.

La présente remarque permettra au lecteur d'aborder le texte qui suit avec toutes les nuances voulues et elle lui indiquera les adaptations de sens indispensables dans cette matière difficile.

1. Encyclopédie Française, 1'12-6.

niable".[1] Cette notation joue donc avant tout un rôle de 'concrétion' : telle série de concepts ou de relations s'agencent 'sous les yeux' de l'imagination (et sur le papier) du mathématicien et forment au fur et à mesure du progrès discursif une architecture symbolique, témoin explicite d'une sorte d'hypothèse de structure abstraite. Le système symbolique empêche ainsi la pensée de se perdre dans la manipulation d'objets-fantômes, sans correspondants notionnels. Il assure, du même coup, la 'précision' et la 'clarté' du raisonnement. Le vague et l'obscurité de la pensée ont besoin du correctif de l''expression' concrète, symbolique. Et la notation se révèle plus apte que le langage courant à expliciter une conception mathématique et à 'rendre' un complexe d'idées abstraites de manière à éviter les ambiguités propres au discours de tous les jours.[2] A ces avantages de la représentation mathématique, s'ajoute celui de favoriser la 'certitude' de la déduction abstraite. La notation répond à notre besoin essentiel de 'vérifier' à un niveau 'concret' les élaborations hardies et périlleuses de la pensée pure. Les combinaisons symboliques exposées là, sous les yeux, et toujours 'revisables', nous permettent de reprendre en sous-main l'oeuvre de la pensée et de lui donner un tour plus rigoureux; de lui

---

1. L. B. Guérard Des Lauriers, Art. cit., p. 609.

2. "... C'est justement en vertu de leur caractère conventionnel que les symboles sont dégagés de ces résonnances psychologiques qui facilitent l'ambiguité et l'équivoque du langage usuel, et qu'ils permettent ainsi à l'esprit de se concentrer sur l'exactitude structurale d'un argument plutôt que sur sa signification réelle". Th. Greenwood, Les Fondements de la Logique Symbolique, II, p. 10. - Une fois la convention des symboles adoptée, "the ambiguity with which ordinary language is infected is then a minimum". Morris R. Cohen and Ernest Nagel, An introduction to Logic and Scientific Method, New York, 1934, pp. 119-120.

faire subir des 'retouches' de plus en plus fructueuses, bref, de procéder à des corrections successives, infinitésimales, qui aboutissent au sommet de la perfection déductive. Aussi, pour Nagel, la notation symbolique se révèle-t-elle un instrument indispensable tant dans l'investigation des fondements de la mathématique pure que dans les recherches plus élaborées qui nécessitent les distinctions les plus subtiles : "In researches where subtle distinctions must be made and 'codified', and where 'maximum explicitness in statement' and 'utmost rigor in demonstration' are at a premium".[1]

Cette remarque de Nagel, qui résume l'ensemble des réflexions précédentes, contribue à éclairer, semble-t-il, le point qui nous occupe avant tout ici : celui de la 'vérification' des jugements algébriques dans l'intuition imaginative. Le rôle fondamental attribué à la représentation symbolique[2] dans les mathématiques modernes nous autorise-t-il à leur appliquer sans nuances le jugement thomiste : "In mathematicis... ad imaginationem deduci debemus" ? Sans vouloir chercher une adéquation parfaite entre la pensée de S. Thomas et le détail des développements modernes, en algèbre notamment, il semble qu'une interprétation suffisamment 'ouverte' de la formule du saint Docteur nous permette de l'appliquer, avec les réserves qui conviennent, sans doute, à la partie 'vraiment mathématique' (et non pas pure-

1. Ernest Nagel, <u>Symbolic Notation...</u>, p. 1879.

2. Il est clair que le rôle de l'intuition dans la nouvelle mathématique apparait surtout nécessaire quand le raisonnement déductif ou l'activité proprement démonstrative (soit dit avec les nuances apportées plus haut) entrent en ligne de compte.

ment logique) de l'algèbre moderne. C'est ce qu'il s'agit d'expliquer brièvement.

Tout d'abord, une fois admise une certaine intuition imaginative dans la partie vraiment mathématique de l'algèbre moderne et une fois décrits les rôles essentiels assignés à ces représentations symboliques, est-il permis de conclure tout uniment à une 'vérification' stricte (au sens euclidien) des notions abstraites dans les formes concrètes réalisées au niveau de l'imagination ? Bien qu'il faille maintenir, semble-t-il, une certaine 'vérification' des concepts mathématiques modernes dans les modèles imaginatifs qui leur correspondent, ce genre de confirmation paraît, d'une part, différer, et à plusieurs points de vue, de celui de la paléo-algèbre et, sous un autre aspect, ces deux modes de vérification semblent présenter quelque affinité.

Tout d'abord les divergences. La vérification ancienne se situerait, avant tout, dans la ligne de la 'vérité', alors que la 'vérification' moderne se rattacherait plutôt à l'aspect 'méthodologique'. La compatibilité des postulats anciens se fondaient, en effet, sur la constructibilité du discret dans l'intuition. Ainsi, dans l'analyse du nombre considéré en tant que représentable dans l'intuition imaginative, on 'découvrait' les principes élémentaires de l'a-

---

Dans les pures opérations de calcul ou dans la partie plus mécanique des mathématiques modernes, un certain recours à l'intuition (quoique plus 'élémentaire' et plus 'matériel') s'impose encore en tant que cette activité s'exerce sur des symboles et qu'elle relève du mathématicien et non de la machine.

Pour le genre de 'vérification intuitive' qui intervient alors, voir la suite du chapitre.

rithmétique et de l'algèbre; et, inversement, l'absence de contradiction latente à l'origine de ces principes était 'certifiée' par la constructibilité du discret dans l'intuition. Le procédé intuitif assurait,pour sa part, la validité même de l'axiomatique. Il touchait aux notions d''authenticité', de 'rectitude', c'est-à-dire de 'vérité' dans un système mathématique. Pareille vérification se présente comme 'intrinsèque' au système et elle fonde, au sens strict, la légitimité de la conclusion.

Les structures abstraites modernes paraissent plus affranchies du complexe symbolique. Celui-ci se présente, en ce cas, comme un système de référence sensible qui apporte 'précision', 'clarté', 'certitude' au processus déductif. La pensée discursive l'utilise comme témoin concret d'un raisonnement qui trouve en lui-même sa justification. Le rôle de la notation symbolique paraît, alors, beaucoup plus 'instrumental' que dans la paléo-algèbre où la représentation imaginative 'confirmait' la rectitude des postulats, et la validité des conclusions.[1] Sans doute, pas plus dans la mathématique ancienne que moderne, la représentation intuitive, nécessairement singulière, n'épuise l'objet, essentiellement universel; et pas plus dans l'une que dans l'autre, on ne peut se dispenser de l'image; il n'en reste pas moins qu'au point de vue de la 'vérification' des données abstraites dans l'intuition imaginative, les schémas figuratifs modernes

---

1. Les symboles de l'algèbre élémentaire se présentent sans doute comme 'opérationnels', mais ils tiennent leur pouvoir de vérification du fait qu'ils représentent des entités homogènes.

jouent un rôle beaucoup plus 'extrinsèque' que les anciens. Si l'on peut, en effet, attribuer une certaine 'vérification' aux symboles modernes, c'est que leur présence dans la faculté sensible comporte, pour les raisons mentionnées, un certain effet sur la 'vérité' même du système mathématique. Rappelons qu'ils 'soutiennent' le raisonnement qui, sans eux, ne pourrait 'aller bien loin' dans ses déductions; puis qu'ils favorisent la 'précision' et la 'clarté' de la pensée, qui s'exerce avec plus d'aisance sur une matière 'constatable' et 'contrôlable' que sur de pures généralisations; et aussi qu'ils permettent des 'retouches' salutaires et toujours plus 'fines' à un système déductif ainsi offert à l'oeil, ainsi 'concrétisé', 'matérialisé', 'codifié' dans la pleine évidence de ses agencements et de ses transitions;[1]

---

1. "Symmetries, relations and resemblances which in ordinary language are hidden or veiled are made to stand out boldly in a symbolic idiom". James R. Newman, The World of Mathematics, p. 1853. - La valeur des symboles comme aide de la perception "has long been recognized in mathematics. Thus, to take an elementary illustration, the difference in form between $4x^2 = 5x - 1$ and $4x^3 = 5x^2 - 1$, and the identity in form of $x + y = 1$ and $4x = 3y$, can be perceived at a glance. In the first pair of equations one is quadratic, the other cubic; both equations of the second pair are linear. It would be well-nigh humanly impossible to carry out a long series of inferences if such equations were stated in words. Thus the verbal statement of what is represented by Maxwell's equations would easily fill several pages and the essential relations between the various factors involved would thus be hidden". Morris Cohen and Ernest Nagel, An Introduction to Logic and Scientific Method, p. 120.

et enfin, par l'ensemble de ces 'sommations', de ces 're-considérations', de ces 'explicitations' renouvelées[1] d'une argumentation toujours 'palpable', ils ouvrent la voie à la démonstration la plus rigoureuse.[2] C'est en ce sens que la représentation symbolique 'vérifie' le jugement mathématique moderne. Ce contrecoup indéniable de l'image sur la 'vérité'[3] d'un système comporte sans doute une grande valeur, mais on admettra que cette influence se révèle indirecte, éloignée, et plutôt 'extrinsèque' au système quoique nécessaire. De là apparaissent les importantes différences qui séparent, au point de vue de la vérification intuitive, le mode ancien du moderne.

Ces divergences s'aggravent du fait que la 'généralité de représentation' observée dans l'ancienne algèbre diffère sensiblement de la généralité telle qu'on en parle de nos jours.

Ainsi, malgré leur signification opérationnelle, les symboles de la paléo-algèbre tiennent la place d'objets 'quantitatifs' et 'homogènes'. Et à ce titre, ils possèdent un pouvoir de vérification intuitive de la connaissance mathématique. Les représentations

---

1. Ce travail de patiente élaboration d'un système accapare, la plupart du temps, de nombreuses années d'une vie concentrée.

2. "An efficient symbolism not only exposes errors previously unnoticed, but suggests new implications and conclusions, new and fruitful lines of thought". J. R. Newman, Op. cit. Ibid.

3. N'oublions jamais le sens très particulier que revêt ce mot dans les systèmes hypothético-déductifs que constituent les mathématiques récentes.

modernes, au contraire, impliquent une ampleur illimitée de signification; elles débordent, à ce point de vue, le domaine quantitatif et demeurent indifférentes à la nature des objets signifiés. Elles dépassent même en extension les symboles transcendants de la logique traditionnelle. La notation algébrique moderne (surtout dans sa partie logistique) se caractérise par l'indétermination et l'indifférenciation extrême du contenu. Ces signes se présentent comme de simples systèmes de référence sensible, dont le rôle est de soutenir l'imagination au cours d'une déduction à caractère très formel.[1] Le contenu équivoque de ces représentations se trouve enveloppé dans des concepts à contour extrêmement imprécis, ouverts à n'importe quoi. On a quitté, ainsi, depuis longtemps le terrain mathématique pour se hisser à celui d'une logique bien particulière qui tendrait à se réduire à un jeu de symboles sans signifiés correspondants, à une 'raide' jonglerie sur des signes 'vides'. Une fois parvenu à ce formalisme, dont tout l'effort porte sur des relations entre symboles, on est loin d'une 'vérification' intuitive de la connaissance. D'ailleurs, à ce niveau, il faudrait commencer par s'entendre sur la notion de vérité, qu'on réduit au concept de non-contradiction;[2] il faudrait distinguer entre

---

1. Dans le système formel pur, l'intuition "ne porte plus sur le contenu des concepts ou des expressions : elle se réduit à 'l'intuition de manipulations définies sur un système de signes'. Il suffit de pouvoir identifier un signe, distinguer deux signes différents, remplacer un signe par un autre suivant un modèle de substitution". Jean Ladrière, <u>Les Limitations internes des Formalismes</u>, p. 37.

2. La notion de vérité dans les mathématiques modernes s'éclairera davantage au chapitre 6.

'tautologie' et 'démonstration'; 'raisonnement' et 'identité'; 'inférence' et 'répétition', etc.

Le processus logistique s'éloigne encore plus de la 'représentation imaginative' que la métaphysique elle-même. Il existe un certain rapport, fût-ce simplement négatif, entre la connaissance métaphysique et le 'phantasme'; celui-ci oriente, en un sens, la pensée abstraite, par son insuffisance même, en provoquant une négation 'plus vraie que l'affirmation' dans ce domaine fort au-dessus de notre portée. La métaphysique porte ainsi plus d'intérêt à l'intuition imaginative que la logique symbolique qui voudrait ne s'arrêter qu'aux pures relations, qu'aux abstractions vides de tout contenu et de toute image. La pensée qui roule sur elle-même ! Contradiction manifeste à laquelle on tend.

A ce niveau, la formule thomiste : "In mathematicis..." ne vaut plus pour la bonne raison qu'on a alors quitté le domaine mathématique. Dans les mathématiques modernes plus 'réalistes', les symboles jouent les divers rôles de 'précision', etc. déterminés plus haut. Il est même légitime de parler, en ce cas, comme on l'a signalé, d'une certaine 'vérification' sur le plan de l'imagination, sans atteindre la confirmation 'directe' qui s'observe dans l'ancienne mathématique. Ce besoin essentiel, qui se fait ressentir dans l'algèbre moderne, d'un symbolisme de plus en plus complexe tient, non seulement au mode de notre connaissance qui, même dans ses états les plus élevés (en métaphysique, par exemple), exige un support sensible quelconque, mais surtout, semble-t-il, à la nature de la discipline elle-même, qui comporte une liaison spéciale avec l'imagination. Si cette manière de voir convenait, la mathématique moderne resserrerait, au strict point de vue de la vérification imaginative, ses liens de parenté avec la paléo-algèbre. Et s'il faut réellement reconnaître que les jugements mathématiques (arithmétiques aussi bien que géométriques) se 'terminent' dans l'imagination, peut-être serait-il légitime d'affirmer que l'arithmétique et l'algèbre moderne 'dépendent' dans leur vérité même, (jusqu'à un certain point, c'est entendu) de l'intuition imaginative. La formule demeure vague évidemment, et pour cause. Les précisions antérieures auront suffi pour l'éclairer. En définitive donc, on serait peut-être en droit de conclure que, même pour le cas des mathématiques modernes (considérées au moins dans leur partie vraiment mathématique), la formule thomiste comporte un sens véritable, bien que beaucoup plus nuancé, il va de soi, que dans la mathématique ancienne. Ce principe, en d'autres termes, réalisé adéquatement dans l'arithmétique primitive, se situe au fondement même d'une discipline qui ne pourra jamais l'ignorer totalement.

Il semble bien pourtant qu'un grand nombre de mathématiciens modernes l'ont rejeté depuis longtemps, ce principe de l'intuition imaginative, et au 'départ' et au 'terme' de leur discipline. Ils s'empressent d'ailleurs de l'affirmer et d'en proclamer les heureuses répercussions : "L'émancipation des mathématiques de l'imagination sensible, écrit Beth, produit des résultats tellement précieux que nul mathématicien ne pense à accepter les restrictions que les philosophes voudraient leur imposer".[1] D'autres se contentent de signaler les dangers d'un usage trop confiant de l'intuition imaginative : "On ne saurait trop mettre en garde, observe Bouligand, contre le fait de s'abandonner d'une manière exclusive à l'intuition, qui mène souvent à l'erreur, et par suite, ne peut se substituer à une déduction rigoureuse".[2] L'intuition sensible, en mathématiques, interprétée dans un sens trop étroit se révèle sans doute insuffisante pour rendre compte de toutes les créations modernes. On ne saurait nier, d'un autre côté, que ces développements mêmes sont dus, pour une bonne part, à son influence lointaine et primitive, parfois même à son impulsion actuelle et directe. Le recours incessant et inévitable des mathématiques les plus évoluées à l'intuition symbolique contribue à renforcer ce point de vue.

Sans doute faut-il reconnaître, d'un autre côté, les 'limites' de l'intuition qui joue plutôt un rôle 'auxiliaire' dans la

---

1. E. W. Beth, Les fondements logiques des mathématiques, p. 14. - "Actually, dit Kasner, it (Viz. Mathematics) may transcend common sense and go beyond either imagination or intuition". Mathematics and the Imagination, p. 18. - "The layman in mathematics is satisfied with an intuitive grasp; the mathematician demands an exact formulation... The mathematician... is not called upon to struggle with the bounds of imagination, but only with the limitations of his logical faculties". Ibid., p. 123.

2. G. Bouligand, Les Méthodes Mathématiques, p. 2. - "Because intuition turned out to be deceptive in so many instances, remarque Hans Hahn, and because propositions that had been accounted true by intuition were repeatedly proved false by logic, mathematicians became more and more sceptical of the validity of intuition. They learned that it is unsafe to accept any mathematical discipline on intuitive convictions. Thus a demand arose for the expulsion of intuition from

connaissance mathématique moderne. Elle ne saurait jamais supplanter la stricte connaissance mathématique, qui est, d'abord, intellectuelle. Mais reconnaître les insuffisances de l'intuition mathématique et nier sa nécessité au principe et au terme du jugement mathématique, c'est différent.

Il semble, d'ailleurs, qu'il faille interpréter en ce sens limitatif les opinions contraires, à première vue, à l'intuition imaginative dans ces sciences exactes. Ce que les dissidents paraissent rejeter, c'est l'intuition comme critère unique et ultime de vérité; c'est aussi, sans doute et d'abord, l'intuition 'naïve', trop 'réaliste', 'visualisante', 'idiosyncrasique'. Ils refusent, par le fait même, l'usage trop universel de l'intuition 'directe', trop strictement déterminée. Le fait que tous ces adversaires de l'image, en mathématiques, se présentent, en même temps, comme de forts manipulateurs de symboles et même comme des créateurs de systèmes symboliques, paraît confirmer cette interprétation mitigée de leur fougue anti-intuitioniste.

Les considérations précédentes nous permettront d'entrevoir à quel point la notion aristotélicienne d'intuition imaginative en mathématique demeure 'ouverte' à tous les véritables progrès en ce domaine. Sans doute l'interprétation contemporaine de cette con-

---

mathematical reasoning, and for the complete formalization of mathematics..." Hans Hahn, The Crisis of Intuition, p. 1970.

ception primitive s'avère-t-elle délicate, nuancée, mais assez précise toutefois et suffisamment articulée pour paraître satisfaisante.

Il importe maintenant d'aborder la partie la moins 'intuitive' des mathématiques modernes : la logique symbolique, et de la confronter à la logique traditionnelle.