Chapitre 5

Mathématique et Logique

Il n'est pas surprenant que l'évolution historique de la mathématique ait incliné cette science du côté de la logique. Les notes communes de ces deux disciplines contribuent à les rapprocher sur plus d'un point et, à la fin, il devient même dangereux de les confondre. Toutes deux se présentent, en effet, comme des sciences de 'relations' et de 'formes'; toutes deux opèrent dans un domaine abstrait; grâce, en outre, à l'intelligibilité de son objet, la mathématique constitue, comme Aristote l'avait noté, le terrain d'application par excellence de la rigueur logique. Les caractéristiques semblables de ces deux disciplines ont même conduit, sous la pression des tendances historiques, à les confondre totalement.

Le présent chapitre essaiera de décrire la nature d'une telle assimilation par l'exposé des conceptions logistique et formaliste des mathématiques; puis il étudiera le bien-fondé de ces doctrines au regard de la pensée traditionnelle : les systèmes mentionnés sont-ils, en réalité, mathématiques ou logiques ? Où se situe la logistique par rapport à la logique classique ? Faut-il, en toute objectivité, maintenir l'ancienne distinction entre la mathématique et la logique ? En d'autres termes, la cohérence de la logistique se révèle-t-elle suffisante pour abolir toute différence essentielle entre ces deux disciplines ?

Les étroites affinités qui relient mathématique et logique se sont de plus en plus resserrées à travers les âges pour aboutir à une affirmation d'identité non dissimulée. L'opinion si ferme des philosophes actuels, sur ce point, n'a pas surgi en un jour. Leibniz avait déjà espéré établir un mode universel de pensée basé uniquement sur le symbolisme mathématique. De Morgan et surtout George Boole[1] ont donné suite à son idée, et, grâce surtout aux efforts du second, la logique symbolique a pris une certaine consistance. Les travaux de Frege et de Peano, dont Russell et Whitehead se sont inspirés, ont donné l'impulsion décisive à cette nouvelle 'mathématique' qui dépasse le rêve du mathématisme universel de Descartes et de Leibniz eux-mêmes. Pour les tenants de l'école symbolique, non seulement logique et mathématique ne sauraient s'opposer, mais la seconde se base sur la première; mieux encore, il existe une identification pure et simple des deux disciplines, et le problème de leur distinction est devenu une question oiseuse : "The fundamental thesis of the following pages, that mathematics and logic are identical, is one which I have never since seen any reason to modify".[2] Cette position, désormais générale,[3] a

---

1. Cf. G. Boole, An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities, 1854.
2. B. Russell, Principles of Mathematics, Intr., p. V. - Cf. même auteur, My Mental Development, p. 386. - Philip E. B. Jourdain, The Nature of Mathematics, p. 69. - Carl G. Hempel, On The Nature of Mathematical Truth, p. 1631 : "Mathematics is a branch of logic", etc., etc. - Frege disait déjà : "Arithmetic is only an extended logic, every arithmetic proposition is a law of logic derived from logic". Pour lui, la connaissance des lois de la logique suffisait pour décider de la nature du nombre et des mathématiques en général. Cf. L. O. Kattsoff, A Philosophy of Mathematics, ch. 4.
3. Cf. Clarence Irving Lewis, Symbolic Logic, preface, et pp. 3, 5, etc. - Pour brefs développements historiques, voir surtout

élargi le sujet de la mathématique aux dimensions de celui de la logique.[1] La quantité, l'étendue et le nombre sont maintenant englobés dans une conception plus 'large', de la mathématique, l'idée de 'relation' entre concepts abstraits.[2] L'incorporation des mathématiques à la logique implique, en effet, la réduction de la 'matière' mathématique à la matière logique. Cette identification suppose, en outre, une parfaite affinité sur le plan des principes, de la méthode, etc. Mais ce problème mérite une étude plus attentive. Quelle est donc, au fond, la nature de cette assimilation de deux sciences autrefois si distinctes réalisée dans la logique symbolique ? Dire que les mathématiques constituent une branche de la logique revient à admettre que

> "les concepts mathématiques peuvent être entièrement dérivés des concepts logiques : la mathématique n'est qu'une partie de la logique et en ce sens il n'y a pas de concepts mathématiques spécifiques, de concepts fondamentaux extralogiques". 3

E. T. Bell, The Development of Mathematics, N. Y., McGraw-Hill, 1945, et Men of Mathematics, N.Y., Simon and Schuster, 1937.

1. "Thus the subject matter of symbolic logic is merely 'logic' - the principles which govern the validity of inference". Clarence Irving Lewis and Cooper Harold Langford, History of Symbolic Logic, p. 1859.

2. "... La mathématique cessait d'être une science distincte pour se fondre dans une logique générale, une sorte de 'panlogisme', ayant pour objet l'étude des diverses relations que l'on peut établir formellement entre les concepts abstraits". P. Boutroux, L'Idéal Scientifique des Mathématiciens, p. 153.

3. Jean Ladrière, Les Limitations Internes des Formalismes, p. 26. - "On montre comment les concepts de nombre cardinal et de nombre ordinal peuvent être dérivés de la logique des relations et comment le concept d'ensemble peut être ramené à celui de fonction propositionnelle". Ibid.

Par concepts mathématiques, il faut entendre ceux de l'arithmétique, de l'algèbre et de l'analyse; quant aux concepts logiques, ils se réduisent surtout aux trois suivants : les propositions, les classes et les relations.[1]

Au lieu de débuter par les concepts, comme la logique traditionnelle, la logistique prend comme point de départ les propositions. Dans un tel système, la prépondérance est accordée à la notion de jugement sur celle de la simple appréhension des objets. Et le concept se définit en fonction de la proposition, et non inversement, comme on y était habitué. Le calcul[2] des propositions utilise surtout les notions d'implication et de négation; chacune s'exprime au moyen d'un symbolisme approprié.[3]

---

1. "The subject of symbolic logic consists of three parts, the calculus of propositions, the calculus of classes, and the calculus of relations". B. Russell, Principles of Mathematics, p. 11. - Il faut ici considérer les relations dans la 'généralité de leur forme', autrement, elles ne suffiraient pas à rendre compte de la logistique : "Symbolic logic is essentially concerned 'with inference in general', and is distinguished from various special branches of mathematics mainly by its generality". Ibid.

2. Car chacun des concepts fondamentaux de la logistique utilise son calcul. Boole définit le calcul en ces termes : "... Calculus, dit-il, is a method resting upon the employment of symbols, whose laws of combination are known and general, and whose results admit of a consistent interpretation". Mathematical Analysis of Logic, p. 1857. - Pour Whitehead, le calcul est "the art of the manipulation of substitutive signs according to fixed rules, and of the deduction therefrom of true propositions". A Treatise of Universal Algebra, pp. 3-4.

3. Cf. Abel Rey, Encyclopédie Française, I, Pensée - Langage - Mathématique, 1·18-4 et 5.

L'analyse de la proposition et l'introduction d'éléments variables dans sa structure conduit peu à peu[1] à la notion de classe. Celle-ci apparaît comme l'intégration des variables d'une fonction propositionnelle.

La logique symbolique accorde enfin une importance particulière au concept de relation. Mais celle-ci se définit, en logistique, par son extension; l'aspect fondement est complètement négligé.[2] La logique nouvelle vise à découvrir toutes les relations possibles[3] entre deux faits quelconques. Pour faciliter le calcul, et surtout pour lui donner plus de clarté et plus de rigueur, les mathématiciens ont inventé un symbolisme des relations entre elles[4], de sorte que le symbole est devenu souverain en logique et en mathématiques modernes. D'ailleurs, on l'a vu, logique et mathématiques ne se distinguent plus.

---

1. Car la classe se définit au moyen de la fonction propositionnelle. L'étude de cette dernière doit donc précéder toute discussion sur le concept de classe.

2. Définir, en effet, la relation comme "la classe des couples de termes qui rendent vraie une fonction propositionnelle à deux variables ayant entre elles une relation déterminée" revient à souligner le seul point de vue 'extension' du concept de relation. Aristote avait considéré la relation sur un double plan : celui de la métaphysique et celui de la logique. Le caractère ontologique de la relation s'impose en bien des cas; par ex., quand il s'agit de déterminer la nature des relations particulières de chaque instance individuelle.

3. Les premières démarches de la logique symbolique tendent à manifester comment les relations les plus simples - comme celles de conjonction, de négation, de disjonction et d'implication - sont liées entre elles et, en un sens, réductibles l'une à l'autre.

4. Cf. Clarence Irving Lewis and Cooper Harold Langford, History of Symbolic Logic, p. 1861.

Les logisticiens ont tenté, sans y parvenir, on le constatera bientôt, de "transcrire en 'symboles' toute la structure des raisonnements, afin de leur conférer l'évidence rigoureuse et tangible d'une déduction 'mathématique'".[1] C'est l'algèbre qui servit de fil conducteur aux premiers logisticiens.[2] Dès lors, les concepts fondamentaux de cette nouvelle logique différaient beaucoup de ceux de la logique classique. De même pour les méthodes utilisées. Mais on reviendra sur ce sujet.

Ce qu'il faut maintenant retenir, c'est que, en plus d'identifier les concepts de base de la logique et de la mathématique, les tenants de la logique symbolique ont visé à l'assimilation des 'méthodes' de ces deux sciences. Pour eux, en effet, tous les modes de preuve employés en mathématique doivent se réduire à des méthodes purement logiques.

Et enfin, troisième temps de cette tentative d'identification, toutes les propositions et tous les théorèmes de la mathématique doivent se déduire de la définition des concepts au moyen de 'principes' strictement logiques (les axiomes d'infinité et de choix y compris[3]). Se demander où la logique finit et où la mathématique

---

1. R. Feys, Notions de Logistique, p. 1.

2. Ibid.; J. Ladrière, op. cit., p. 17.

3. Ces deux axiomes "semblent bien cependant introduire des éléments extra-logiques : la validité de l'axiome d'infinité est en effet relative au domaine d'individus considérés et celle de l'axiome de choix aux fonctions propositionnelles valables dans le domaine considéré". Jean Ladrière, op. cit., p. 26.

commence, c'est céder à l'arbitraire. Encore une fois, mathématique et logique, c'est tout un. En bref, pareille assimilation s'opère d'abord sur le plan des 'concepts' de base ou entités élémentaires (propositions, prédicats, etc.); puis au niveau de la 'méthode' (modes de déduction, processus d'étude des opérations, mode symbolique de représentation des opérations, etc.); enfin dans le domaine des 'principes'.[1]

Cependant, l'impuissance à découvrir une méthode de démonstration absolue de la cohérence du système logistique, et surtout l'apparition des fameux paradoxes, qui attirèrent l'attention sur les contradictions dissimulées au sein des constructions mathématiques, intéressèrent Hilbert, en particulier, qui tenta d'établir un système logique impeccable, une preuve irréfutable de cohérence interne des mathématiques. Il voulait opérer une 'purification' de plus en plus poussée des concepts mathématiques et procéder à une homogénéisation jugée désormais définitive de la logique et de la mathématique.

---

1. "The starting point of any strictly logical treatment of geometry (and indeed of any branch of mathematics) must then be a set of undefined elements and relations, and a set of improved propositions involving them; and from these all other propositions (theorems) are to be derived by the methods of formal logic". Oswald Veblen and John W. Young, A Mathematical Science, p. 1696. - "We understand the term 'a mathematical science' to mean any set of propositions arranged according to a sequence of logical deduction". Ibid., p. 1697. - Cf. Max Black, The Nature of Mathematics, pp. 4 ss.

Une telle entreprise revenait à une "formalisation complète" des mathématiques.[1] Transformation qui implique une mise à l'écart de la "mathématique à contenu" où les questions philosophiques ont dominé bien souvent les controverses, pour l'adoption d'un système où la "réalité concrète des signes" vides de substance forme toute la réalité mathématique.[2] Il suffit de conserver, en outre du signe, la pensée par 'relations' pour obtenir un système formel adéquat.[3]

---

1. "Pour le formaliste, la mathématique devient 'la science des systèmes formels'". J. Ladrière, Op. cit., p. 34. - Cf. Haskell B. Curry, Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics, pp. 56 ss. L'auteur explique le sens de 'système formel'.

2. J. Ladrière, Ibid., préface, p. 2. - "...En mathématiques en particulier, l'objet de notre examen ce sont les signes concrets eux-mêmes dont la forme nous apparaît immédiatement avec évidence, conformément à notre position fondamentale, et demeure parfaitement reconnaissable". Hilbert, 7, pp. 170-171 : cité par J. Ladrière, Ibid., p. 3. - "Pour moi, ... les objets de la théorie des nombres sont les signes eux-mêmes, dont nous pouvons reconnaître la forme en toute généralité et en toute sécurité, indépendamment des circonstances de lieu et de temps, de toutes les conditions particulières de leur présentation aussi bien que des différences insignifiantes qui peuvent affecter leur tracé. Le point de vue philosophique solide que je considère comme indispensable pour le fondement des mathématiques pures... se résume comme suit : 'au commencement - c'est ainsi que nous nous exprimerons ici - est le signe'". Hilbert, 5, p. 163, Ibid., p. 4. - Vu l'importance accordée au signe par le système hilbertien, Poirier conçoit justement l'attitude formaliste comme celle "qui consiste à définir axiomatiquement les symboles numériques". R. Poirier, Le Nombre, p. 87.

3. "Il s'agit d'étudier les propriétés d'un objet qui se présente sous une forme concrète, on n'a plus àtenir compte de la signification des symboles utilisés mais seulement de leur configuration et de la manière dont ils peuvent se distribuer, se combiner, s'échanger, se substituer les uns aux autres". J. Ladrière, op. cit., p. 8.

Les modes de ces diverses opérations constituent les 'règles du calcul'. Simples lois de manipulation mécanique, autonome, qui tend à éliminer la pensée.[1] Processus 'limpide', au surplus. L'étalement ordonné de ces signes 'sans signifiés' comporte une clarté intrinsèque : ils sont ce qu'ils sont, sans plus; ils parlent d'eux-mêmes comme une mosaïque, un schéma abstrait, un diagramme géométrique.

La méthode hilbertienne tendait tout d'abord à sauver l'ensemble des mathématiques classiques, c'est-à-dire à montrer que les processus traditionnels n'entraînent jamais de contradiction, ni n'entrent en conflit avec les autres systèmes. Au corps des mathématiques usuelles, Hilbert joignait la théorie des ensembles; il tenait compte, en outre, de certaines vues constructivistes des intuition-

---

1. "La combinatoire de Russell vise expressément à rendre l'existence d'un intellect humain absolument inutile en tout ce qui concerne la logique et les mathématiques ("la logique reste tout aussi vraie, s'il n'y a pas de processus intellectuel"). Russell est alors le représentant le plus accompli du formalisme pur..." Abel Rey, Encyclopédie Française, 1·18-10. - "Hilbert and his followers consider mathematics to be a purely formal calculus - i.e., it is almost a mechanical manipulation of symbols which have no reference to any particular 'actual' entities. Mathematics is therefore a pure calculus, and can be replaced by a method, entirely mechanical, for deducing formulae". L. O. Kattsoff, A Philosophy of Mathematics, p. 117. - Le calcul est tautologique : il ne renseigne en rien sur la réalité et il se ramène à des transformations de conventions arbitraires sur des règles linguistiques. Cf. Richard Von Mises, Mathematical Postulates and Human Understanding, pp. 1723-1754; Abel Rey, Encyclopédie Française, 1·18-8; Ernest Nagel and James R. Newman, Goedel's Proof, p. 1683. - La logique a pour but de créer des 'techniques' qui nous permettent de nous tirer d'affaire sans penser : "Formalism is a technique first, and only secondarily a philosophy : a technique for the investigation of the logical interrelation of branches of mathematics and a

nistes. Il tenta d'ériger tout ce bloc scientifique en un système complet et exempt de contradiction sous la forme d'un pur calcul dénué d'interprétation et de contenu.

Pour fonder la légitimité du calcul formel lui-même, Hilbert utilisa le langage metamathématique. Il chercha à développer une théorie de la démonstration "chargée d'étudier les propriétés des formalismes du premier niveau et en particulier d'établir leur non-contradiction".[1] Cette théorie se fonde sur l'analyse du calcul. Celle-ci consiste à noter les divers arrangements de signes en formules et à montrer si une combinaison donnée de signes peut découler d'autres schémas structurels conformément à certaines règles précises d'opération. Une telle étude prétend justifier un domaine étendu des mathématiques : elle s'applique tout d'abord à l'arithmétique, puis, par extension progressive, elle finit par recouvrir toute l'analyse.

On a souvent comparé le calcul mathématique formalisé et la métamathématique au jeu d'échecs. Les pièces et les carreaux correspondraient aux signes élémentaires du calcul; les configurations possibles des pièces aux formules; les positions initiales des pièces aux axiomes et formules primitives du calcul; les configurations

---

philosophy to account for the success of that technique". Max Black, The Nature of Mathematics, p. 149. - Cf. Etiam : J. Von Neumann, The General and Logical Theory of Automata, pp. 2070 ss.

1. J. Ladrière, op. cit., p. 28. - Car la 'vérité' mathématique se réduit à la notion de 'non-contradiction'. La seule question importante pour le pur mathématicien, ce n'est pas la vérité des axiomes qu'il admet ou des conclusions qu'il déduit, mais seulement la nécessité du lien de conséquence qui relie les conclusions aux principes. La consistance interne du raisonnement suffit. Dans une telle perspective, la géométrie, par ex., apparaît comme une collection de sciences déductives basées sur une collection correspondante de groupe d'axiomes.

subséquentes des pièces aux formules dérivées des postulats; et les règles du jeu illustreraient les règles de dérivation pour le calcul. Quoique, d'un côté, les configurations des pièces, tout comme les formules du calcul, se présentent comme dénuées de signification, les interprétations des configurations, tout comme les énoncés relatifs aux formules, prennent un sens parfaitement défini. L'analogie comporte une valeur de concrétion et peut être maintenue avec d'autant plus de profit que le formalisme prétend s'assimiler, on l'a vu, à une technique ou à un jeu de symboles.[1]

Le mouvement formaliste s'orientait vers une double fin : un terme immédiat, l'assimilation de la logique à la mathématique; un but lointain, la déduction absolue. Avant de nous rendre compte si, à ces deux points de vue, la tentative a abouti, il importe, à titre de préliminaires, de situer la logistique par rapport à la logique traditionnelle. La logique symbolique se place-t-elle dans le prolongement de la logique classique ? Si oui, dans quelle mesure ? Comment, d'autre part, en diffère-t-elle ? Après avoir traité ce problème, il faudra étudier la question de la réussite ou de l'échec de la tendance formaliste.

---

1. Cf. E. Nagel and J. R. Newman, Goedel's Proof, pp. 1675 ss. - "Les formalistes conçoivent une existence purement symbolique, dont le signe distinctif, placé en certaines prémisses, pourra se propager le long des chaînes déductives en engendrant des énoncés essentiels : systématisant à l'extrême, on rejoindrait ainsi la conception utopique d'une synthèse totale par l'entremise d'un système formel". G. Bouligand, Le Déclin des absolus mathématico-logiques, p. 51.

On s'accorde en général pour envisager la logistique comme une extension de la logique formelle traditionnelle.[1]

---

1. "... L'on peut prouver que les parties fondamentales de la logistique ne sont que l'élaboration des intuitions initiales d'Aristote sur la valeur et l'expression de la forme de base de la prédication. De sorte que le jugement d'inhérence d'une part, et la théorie de la démonstration de l'autre, peuvent constituer les éléments d'interprétation des découvertes de la logique moderne". Th. Greenwood, La Pensée Mathématique d'Aristote, dans Revue de l'Université d'Ottawa, 12, (1942), p. 94. - "La Logistique, dit Feys, est une manière spéciale de formuler et de dégager la logique formelle". R. Feys, Notions de Logistique, p. 1. - "... There is no opposition between logic of 'proposition' and logic of predicates : both are legitimate parts of 'formal logic' and no complete logic can avoid stating laws or rules belonging to both. Aristotle, as it seems, was plainly aware of that fact, as he explicitly recognised the legitimacy of rules corresponding to the law

$$pq \supset r . \supset . p \sim r \supset \sim q.$$

He only thought - quite rightly from his methodological point of view that such laws or rules cannot be used in demonstration as he defined it". I. M. Bochenski, Ancient Formal Logic, p. 13. - "There is no thinker in the whole history of formal logic whose importance, both historical and systematic, can be compared with that of Aristotle. For not only is he the Logician who was first to 'state' formal laws and rules and study them for their own sake, but also he did it in a way which, given that he is the originator of the whole subject, appears as a tremendous achievement. It has been said that not a single psychological general category was invented after Aristotle; and the same is perhaps true of formal logic. Of course, he did not invent the whole of it; but we owe him most of the fundamental 'ideas on which Logic is still working today' - such as the idea of a formal entailment, of a variable, of an axiom, and many others". Ibid., p. 19. - "Contrary to what is often said, Aristotle knew a number of laws belonging to the logic of relations". Ibid., p. 68. - Voir : Poincaré, Science et Méthode, pp. 172-173. L'auteur explique comment la logique de Russell prolonge celle d'Aristote. Aussi : Clarence Irving Lewis, Symbolic Logic, Préface et Intr., pp. 3-5. - L. O. Kattsoff, A Philosophy of Mathematics, p. 93. - E.W. Beth, L'Existence en Mathématique, p. 42. - J. R. Newman, The World of Mathematics, III, passin, etc.

Il faut éviter, bien sûr, de concevoir ce prolongement d'une manière trop univoque, mais, entendu selon son vrai mode, le développement de la logique aristotélicienne permet d'englober toute la partie constructive des logiques nouvelles.[1] Pour bien saisir le sens de cette intégration, il importe de préciser la nature de la logique formelle traditionnelle. Comme on le sait, ce sont les intentions secondes qui constituent le sujet de la logique. Les intentions secondes se définissent comme des relations de raison qui affectent l'objet considéré en tant que connu. Or dans l'acte de connaissance, il faut envisager deux éléments : la forme de l'opération de la raison et la matière déterminée représentée par cette forme. Cette double modalité de l'acte de connaissance est à l'origine de deux espèces de relations de raison qui affectent l'objet connu comme tel : certaines relations résultent de la forme de l'opération, d'autres de l'objet représenté. Les parties de la logique qui traitent des intentions secondes du premier genre se dénomment 'logique formelle'.[2] Bref, celle-ci considère la forme des propositions et des raisonnements (v.g. la prédication) en faisant abstraction de la nature des objets représentés par cette forme.

Or c'est la forme apofantique S est P ou forme de base de la prédication qui apparaît comme la plus générale de toutes celles

---

1. Th. Greenwood, Les Fondements de la logique symbolique, II, pp. 7 ss. Cette étude remarquable présente un effort d'intégration de la logique moderne dans la logique classique. Ce travail inspirera plusieurs de nos développements immédiats.

2. Thomas McGovern, The Division of Logic, p. 37.

qu'étudie la logique, et qui semble ouverte à toutes les possibilités de développements opératoires modernes, à condition seulement de ramener à cette forme fondamentale les théories de la logique nouvelle qui en diffèrent, et aussi d'utiliser un symbolisme approprié.[1] Précisons cet énoncé par l'application de la forme S est P aux calculs logiques.

Tout d'abord, considérons la forme du jugement élémentaire affirmatif comme un tout et désignons-la par un symbole unique. Entre des diverses propositions prises comme des unités, il est possible d'établir des relations formelles et opératoires au moyen de liens autres que le verbe. Nous aurons ainsi constitué l'objet du 'calcul des propositions'.

Puis analysons la double 'opération de sélection de sujets et de prédicats' que comporte le jugement de la forme S est P, et généralisons cette opération pour aboutir à la 'fonction propositionnelle' et à celle de 'description'.

Nous pourrons ensuite analyser certains rapports du sujet et du prédicat qui s'explicitent dans les relations d'appartenance et d'inclusion et établir ainsi les fondements du calcul 'des classes'.

Enfin, par l'adaptation de la forme apofantique S est P à la catégorie de relation, nous établirons les notions et les opérations nécessaires au 'calcul des relations'.

---

1. Th. Greenwood, op. cit., passim.

Ces diverses transformations et adaptations de la forme de base de la prédication impliquent, encore une fois, l'utilisation du symbolisme moderne. Cette extension de la logique aristotélicienne supposerait, pour devenir suffisamment explicite, des développements qui débordent de beaucoup les cadres de la présente étude. Les quelques notions précédentes suffiront pour faire entrevoir à quel point la logique aristotélicienne, représentant des opérations fondamentales de la raison, demeure une science ouverte à tous les progrès.

La continuité signalée de la logique formelle et de la logistique implique toutefois certaines réserves, exige certaines restrictions destinées à préserver l'unité même de la logique. Sans être donc totalement satisfaisante, l'extension de la logique classique à la logique moderne admet une solution valable.

S'il y a avantage à vouloir réaliser une unification assez poussée de la logique, il ne faut cependant pas perdre de vue les divergences profondes qui séparent logique traditionnelle et logique symbolique. Sans doute existe-t-il, comme on l'a montré, un lien de continuité (surtout au point de vue de la forme), entre ces deux espèces de logiques; il n'en reste pas moins cependant que, d'un autre côté, la nouvelle discipline s'est construite

> "sur des bases fort différentes de celles de la logique traditionnelle : alors que celle-ci considère des formes de raisonnement très proches de celles du discours naturel et s'appuie sur le sens intuitif des opérations déductives qu'elle utilise, la logique moderne s'inspire beaucoup plus des analogies mathématiques qui lui ont permis de fixer ses méthodes que des for-

> mes du discours naturel et elle s'appuie uniquement sur les règles de manipulation au moyen desquelles elle définit ses opérations". 1

La logistique n'a pas été tout d'abord créé par des logiciens, mais bien par des mathématiciens, aussi n'est-il pas étonnant que ces derniers, en appliquant les formes classiques du raisonnement aux objets de leur science, aient utilisé des méthodes plus dépouillées, plus rigoureuses, bref des méthodes du type mathématique. D'où le souci de précision extrême qui caractérise la logique nouvelle; d'où encore la complexité toujours croissante du symbolisme et des modes opératoires; d'où enfin l'importance primordiale accordée à la relation pure, sans sans correspondant ontologique. Au point de vue de la précision, tout d'abord, les deux genres de logiques

> "ne se situent pas au même niveau. L'esprit général de la logistique est analytique : il faut commencer par étudier les opérations tout à fait élémentaires et donner ensuite des procédés permettant, à partir de là, d'obtenir des opérations de plus en plus complexes, dont le sens peut fort bien échapper rapidement à l'intuition". 2

Puis, dans la logistique, on se sert, comme en algèbre "d'une notation symbolique : il y a des constantes, des variables, des signes pour désigner des entités élémentaires (propositions, prédicats, etc.) et des signes pour désigner les relations".[3] Ces combinaisons de symboles

---

1. Jean Ladrière, Les Limitations internes des Formalismes, p. 17.

2. Ibid.

3. Ibid.

sont à l'origine de nouvelles méthodes d'analyse et de généralisations de plus en plus larges. Quant à la place occupée par la notion de pure relation, on a deviné, par les développements précédents, qu'elle a été centrale.

Ajoutons seulement qu'à la différence de la logique du concept, toujours influencée, de façon plus ou moins lointaine, par la notion d'intention première, la logique nouvelle exploite plutôt la notion de 'fonction'.[1] Il en résulte un schéma général et un modèle adapté à toutes les possibilités d'applications modernes, qui sont loin de toujours se présenter comme une connaissance qui tient suffisamment compte des 'natures'.[2] Il s'ensuit, au surplus, un développement unilatéral de la logique qui comporte, comme le verra à l'instant, des insuffisances graves en face de la notion complète de vérité.

La logique symbolique a-t-elle, en fait, réalisé son ambition de devenir le système universel de pensée mathématique ?

> "La philosophie logistique, affirme L. Brunschvicg, a manqué la destinée historique qu'elle s'était promise : elle n'a pas apporté de solution positive et dogmatique au problème de la vérité; elle a révélé seulement, et pour en consacrer peut-être l'issue définitive, le débat ouvert depuis la Renaissance entre l'idéal

---

1. "La fin poursuivie et atteinte par ce calcul à trois étapes est de nous donner les moyens d'expression de toutes les relations, quelles qu'elles soient, entre tous les faits (événements ou objets), quels qu'ils soient, et de nous permettre de construire tous les moyens d'expression recevables..." Abel Rey, Encyclopédie Française, 1·18-16.

2. Ernst Cassirer, Substance and Function, p. 21.

> de la logique scolastique et le progrès de la mathématique moderne". 1

Cet échec de la logique nouvelle est attribuable, semble-t-il, à une raison générale, qui mérite d'être approfondie : la logistique a manqué son but parce qu'elle s'est développée en dehors, pour ainsi dire, du plan de la vérité, par un souci extrême de rigueur formelle. La formalisation est, en effet, apparue quand la mathématique a voulu détacher de plus en plus son objet de l'intuition initiale qui en caractérisait le point de départ et aboutir à un système bien déterminé, parfaitement rigoureux et dépouillé, au surplus, des composantes sensibles qui en compromettaient la clarté. Peu à peu, le système formel passait ainsi du stade "d'instrument" à celui "d'objet" de la pensée mathématique. Sous sa forme la plus abstraite, la mathématique devenait 'la science des systèmes formels'.[2] Car après avoir vidé . . .

---

1. Les Etapes de la Philosophie Mathématique, p. 424. - "On ne peut demander à tel ou tel système formel, écrit Bouligand, de réaliser la mathématique d'une manière complète. La conception logistique de l'unité de principe aboutit donc à une impasse". La Mathématique et son Unité, p. 296. - "L'échec de la logique à donner, par ses seuls moyens, une base aux théories mathématiques, écrit le même auteur, met bien en évidence le déclin des absolus; si leur rôle a été provisoirement des plus utiles, leur pouvoir impérieux doit céder quelque place à des aménagements adéquats, appelés à évoluer". Le Déclin des Absolus Mathématico-logiques, p. 9.

2. Cf. J. Ladrière, op. cit., pp. 408 ss. - Aussi : Haskell B. Curry, Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics, surtout les derniers chapitres.

la raison de son contenu et l'avoir réduite à un jeu de combinaisons destinées à fonder la validité des jugements, l'intelligible logique est devenu "l'ensemble des résultats de ces combinaisons qui, une fois les faits substitués aux signes, répondent à la condition préétablie de vérité ou de justesse".[1] Ainsi, le cadre, le système a absorbé l'intuition et il est apparu comme "la" réalité mathématique totale. L'être mathématique n'a plus alors "à être rejoint, il est rendu accessible de part en part, dans la totalité de ses articulations. L'objet total est aussi un objet qui se soutient seul, sans le secours de la pensée".[2] A ce moment, la structure formelle des mathématiques a dépassé le stade de l'instrumentation pour s'affirmer comme un objet à saisir dans sa réalité squelettique, comme une fin où doit se terminer le mouvement de l'intelligence mathématique. Dans un tel contexte, le cadre et les données intuitives qu'il soutient et ordonne, se présentent comme séparés l'un de l'autre, indépendants, extérieurs l'un à l'autre. Bref, l'être mathématique devient 'sa représentation formelle' posée là, devant l'intelligence.[3] C'est en ce sens que le formalisme s'est détaché du plan de la vérité et qu'il a manqué son but ultime; coupé de l'expérience, de l'intuition, du contact avec le monde des objets, il a abouti au pur

---

1. Abel Rey, Encyclopédie Française, 1·18-17. - "L'ambition du projet de formalisation intégrale, c'est d'élaborer un système qui contienne en lui-même la genèse de son propre sens et qui puisse dès lors être considéré comme autonome". J. Ladrière, Ibid.

2. Ibid.

3. "C'est dire que le système total est une réalité totalement détachée de la pensée et totalement réfléchie en elle-même. Si l'être mathématique devient présent dans le système, c'est qu'il devient, par le système, présent à lui-même". Ibid.

verbalisme, au frêle édifice symbolique,[1] au réseau de relations sans fondement, à la convention vide. Vérité de fait qui remplace la vérité de droit. Ce n'est pas que la formalisation n'ait joué un rôle nécessaire dans le développement des mathématiques : elle a permis une représentation rigoureuse du raisonnement mathématique;[2] elle a, en outre, permis de "corriger l'intuition et de critiquer les pseudo-évidences qui se constituent au niveau des analyses non formalisées."[3] Voilà pourquoi elle ne constitue qu'un échec partiel, c'est-à-dire que, loin de représenter la totalité de la pensée, elle ne réalise qu'un moment dans l'explication adéquate de la connaissance humaine.

Elle a failli surtout, comme on le sait, dans son désir d'instaurer le faux idéal de la déduction absolue.[4] C'est cette tenta-

---

1. La notion même de symbole renvoie d'ailleurs à un 'signifié' extérieur au signe lui-même. Tout symbole comporte un 'sens'; il se réfère à un 'donné', un 'contenu'; il ne peut 'se' signifier, se limiter à lui-même sans perdre sa valeur de 'signe', sans se renier lui-même. Encore là il faut tenir compte des faits élémentaires, du donné intuitif : "La logistique évoque la présence ou l'absence de réalités. Elle ne peut en exprimer le 'contenu'; elle ne peut pas même exprimer le contenu de ce qui est commun à toutes les réalités, à toutes les propositions". R. Feys, Notions de Logistique, p. 102. - Voir au sujet de l'interprétation du symbolisme logistique en termes de faits les pages significatives où l'auteur expose la théorie générale de Wittgenstein, pp. 94-101.

2. "Le recours à la formalisation reste indispensable si l'on veut fonder les mathématiques de façon rigoureuse..." J. Ladrière, op. cit., p. 405.

3. Ibid., p. 411.

4. Ambition que l'intuitionisme a d'ailleurs contribué à supprimer. Cf. L. Brunschvicg, Les Etapes de la Philosophie mathématique, p. 457. - Au sujet de la déduction absolue, il y a lieu de citer ici le passage toujours vrai de Gratry : "La

tive qui est à l'origine d'une certaine mécanisation de la pensée.

Une fois construit, le système formel

> "se mettrait en quelque sorte à proliférer par lui-même, découvrant de façon progressive toutes les virtualités inscrites dans le champ du déductif. Appliquant uniformément des procédures établies une fois pour toutes, il rendrait d'ailleurs superflue toute initiative véritable de la pensée; il offrirait un cadre opératoire à l'intérieur duquel tout problème pourrait recevoir une solution de type mécanique". 1

---

prétention à la démonstration absolue est certainement absurde; car il vient d'un vice profond de l'esprit qui se croit centre, auteur, point de départ, cause première de la vérité. Or, l'esprit humain n'est pas source de vérité, mais seulement canal de vérité. Il n'est pas la lumière, il en est le témoin, il en est le témoin et le contemplateur. Il reçoit d'abord les données, puis les emploie. Mais il ne saurait monter plus haut qu'elles pour les démontrer, puisqu'elles sont l'indispensable point d'appui de sa démonstration et de son mouvement. La prétention à la démonstration absolue consiste à regarder comme inconnu ce qui est très connu; comme douteux ce qui est certain; comme sujet à démonstration, ce qui est vu. La philosophie ferait bien de prier le genre humain de vouloir bien lui accorder, sans démonstration préalable, qu'il existe quelque chose, que nous en sommes certains, et que le moyen légitime et rigoureusement scientifique d'arriver à cette certitude est simplement d'ouvrir les yeux". A. Gratry, <u>Logique</u>, (1855), T. I, pp. 61-64; cité par Th. Greenwood, <u>op. cit.</u>, I, p. 65. - Les vues de Gratry coincident avec celles d'un auteur beaucoup plus récent : "... La nature même de la raison est telle, écrit Ladrière, que son objet ne cesse de la déborder; et parce qu'il n'est pas au pouvoir de l'intelligence de poser devant elle l'objet mathématique total, il n'est pas en son pouvoir non plus de se réfléchir totalement dans un modèle objectif qui exprimerait adéquatement son projet. Ces deux limitations sont solidaires et elles sont indiquées simultanément par les limitations que contient, à son niveau propre, la théorie des systèmes formels". <u>Op. cit.</u> p. 9.

1. J. Ladrière, <u>op. cit.</u>, p. 409. - "La mathématique ne se laisse intégrer dans aucun système formel, dans aucun jeu combinatoire opérant d'après des règles convenues sur caractères en plomb répétés ad libitum". G. Bouligand, <u>La Mathématique et son Unité</u>, p. 304.

Il faut cependant éviter de croire que la méthode formelle se réduise à un pur calcul.[1] Il se présente, au sein d'un tel système, bien des problèmes qui ne peuvent être résolus par simple recours à des méthodes mécaniques, à des modes opératoires préétablis.[2] Ici encore apparaît la nécessité de se référer à l'intuition trop négligée par le formalisme.

En plus de mécaniser, jusqu'à un certain point, la pensée mathématique, l'ambition formaliste de la déduction absolue s'est encore fourvoyée en se complaisant outre mesure, comme on l'a souvent rappelé, au jeu des pures relations. La relation suppose, en effet, un contenu intuitif; elle implique des termes et un fondement. Comment, à la façon de la logique symbolique, concevoir la relation en dehors même des faits qui sont censés la constituer ?[3]

---

1. "La puissance du calcul, sous diverses espèces, va croissant. C'est pourquoi le champ du calcul est confondu par bien des commentateurs avec le champ intégral de la mathématique". G. Bouligand, Ibid., p. 257.

2. Cf. J. Ladrière, Op. cit., pp. 412-413.

3. "Pour que la relation signifie quelque chose, il faut qu'elle soit relation entre des choses, qu'elle ait ses supports et ses termes. Elle les a, si l'on veut, dans ces faits impénétrables qui semblent ne surgir que pour être reliés les uns aux autres. Mais c'est vraiment n'en point avoir si ces faits n'interviennent d'aucune manière dans la structure de la relation elle-même. Nous sommes en face d'un schéma. Nous savons qu'il est. Nous ne savons ni ce qu'il est, ni à quoi il correspond, ni quel est son sens. La logistique ne nous donne-t-elle pas finalement une impression de vide comme la mathématique purement formelle dans sa conception anti-intuitioniste ? ... Aussi l'analyse des moyens de connaissance a-t-elle toujours amené les penseurs qui l'ont renouvelée à mettre en évidence, tout en insistant de plus en plus sur le caractère relationnel des expressions de la pensée, un contenu intuitif de la relation :

La déduction absolue avec ses règles opératoires automatiques et ses relations pures ne peut représenter la totalité du vrai : on se voit toujours rejeté, de quelque manière, au donné concret.

L'intuition s'impose, en effet, au principe des théories et dans leur développement. L'autonomie qui caractérise le formalisme dans ses manipulations de symboles ne saurait constituer la phase définitive du système. Celui-ci tire, en effet, son sens premier de ses rapports avec le domaine de l'intuition.[1]

---

contenu intuitif qui, loin d'être indifférent à la relation elle-même, lui donne sa signification propre." Abel Rey, Encyclopédie Française, 1·18-8. - "Le raccord entre le champ mathématique proprement dit et la logique ramenée à la forme opératoire, est beaucoup moins parfait qu'on le croit souvent. Il échoue dès qu'intervient l'idée de l'infini sous quelque forme... Pour reprendre ici... certains mots expressifs employés au siècle dernier par Cournot, 'il n'y a pas d'ordre logique parfaitement isolable', ce qui se manifeste vraiment, c'est 'l'ordre rationnel' inspiré par le souci de la vraie raison des choses". F. Le Lionnais, Les Grands Courants de la Pensée Mathématique, p. 73. - D'ailleurs la simple 'notion d'ordre' se révèle insuffisante en mathématiques. Russell nous en avertissait déjà dans sa définition du nombre. Definition of number, p. 541. - Voir aussi : L. B. Guérard Des Lauriers, Analyse de l'être mathématique, dans Revue des Sciences philosophiques et théologiques, 22, 1933, p. 395. - La notion d'ordre, quoiqu'elle apparaisse insuffisante en mathématiques, y joue néanmoins un rôle essentiel aussi bien en arithmétique qu'en géométrie. Cf. Ibid., p. 398.

1. "Il ne peut donc être question d'abolir le travail de l'intuition. Le formalisme, une fois constitué, a sa consistance propre et autorise des manipulations autonomes, mais ce n'est jamais que d'une manière provisoire; son sens reste relatif au champ intuitif dont il s'est détaché, il y a un moment de l'interprétation dont on ne peut faire totalement abstraction". J. Ladrière, op. cit., pp. 439-440.

La vieille théorie qui traite les êtres mathématiques comme des 'abstracta' demeure inchangée, même de nos jours. Les objets mathématiques ne sauraient s'identifier avec des intelligibles directement et immédiatement accessibles à l'intelligence comme telle.[1] Aussi la méthode formelle ne peut jamais ignorer totalement le donné primitif, qui se rattache à l'expérience mathématique élémentaire. Autrement il faudrait admettre que l'être mathématique s'épuise dans ses manifestations, alors qu'au contraire, il déborde l'intelligence.[2]

En définitive, seule la théorie dualiste, c'est-à-dire celle qui interprète les entités mathématiques en faisant intervenir

---

1. Sans doute les entités mathématiques, un peu comme les objets de la logique, résultent-ils de l'activité de notre intelligence - "consequuntur ex modo intelligendi, sicut est abstractio mathematicorum et hujusmodi". <u>In I Sent.</u>, d. 2, q. 1, a. 3. - Nous voulons parler ici des objets métaphysiques, qui sont directement accessibles à une intelligence proportionnée et qui sont tellement au-dessus des données sensibles, que, dans leur cas, la négation de l'élément concret nous rapproche davantage de la vérité que son affirmation.

2. "... Il n'est pas possible de formaliser complètement une théorie mathématique dès qu'elle atteint un certain niveau de complexité. Dans certains cas, le modèle symbolique échoue à représenter de façon adéquate les liens déductifs qui existent au sein de la théorie sous sa forme intuitive, non formalisée. Dans d'autres cas, ce modèle échoue à représenter certains concepts intuitifs à la théorie. De toute façon, on ne peut faire abstraction du rapport de signification qui relie le modèle symbolique au domaine mathématique qu'il est chargé de représenter. Il y a un moment de l'interprétation qui ne peut pas être mis entre parenthèses. Le recours à la pure intuition du signe, telle que l'envisageait Hilbert, ne peut suffire. L'utilisation de la méthode formelle marque un progrès évident et a permis d'obtenir un certain nombre de précisions d'une grande portée sur la structure des théories mathématiques. Mais elle ne dispense pas la pensée mathématique de maintenir le contact avec certaines intuitions qui sont antérieures à la formalisation et que celle-ci peut seulement aider à clarifier". <u>Ibid.</u>, pp. 8-9.

l'intuition et la formalisation[1] apparaît comme satisfaisante.[2] La grande loi physique de la complémentarité a son correspondant au niveau mathématique. Intuition et formalisme, quoique irréductibles[3],

---

1. "Mais la logique n'est pas tout. Les parties les mieux assurées de l'Histoire nous montrent en l'évolution des parties mathématiques 'le balancement ininterrompu d'une pensée créatrice entre l'intuition et le formalisme'". G. Bouligand, La Mathématique et son Unité, p. 302.

2. Ce n'est pas que les objets formels dépendent de l'intuition quant à leur signification actuelle. L'intuition se place au fondement du système formel comme un point de départ qui lui permet de s'ériger et de garder sa consistance. Voir à ce sujet, l'excellente mise au point de J. Ladrière, op. cit., p. 441. - "L'intuition, remarquons-le, n'a pas besoin d'être conçue, ainsi que le fit coutumièrement l'épistémologie classique, comme une pourvoyeuse 'd'objets'. Le passage de la mathématique intuitive à la mathématique formelle montre que l'essentiel de la fonction dévolue à l'intuition est d'ouvrir aux 'projets' mathématiques de la pensée leur carrière indéfinie, 'simplement de faire qu'ils puissent avoir lieu'". R. P. Dubarle, Formalisations et théorèmes critiques, dans Dialectica, 11, 1957, p. 113. - En vue d'établir la nécessité permanente de l'intuition, le même auteur poursuit : "... S'il est impossible à la mathématique de se totaliser dans quelque expression formelle se contenant soi-même et ainsi satisfaisant aux conditions de l'intelligibilité vraie, c'est bien la réalité de cette matérialité mentale (c'est-à-dire la matière intelligible), substantiellement nulle et pourtant inépuisable, qui en est la raison. Le vouloir qui se fait auteur de la pensée mathématique n'est pas un vouloir pur de l'esprit, ni le vouloir d'une pensée pure. Il est le vouloir d'un esprit passant déjà à la matière, à l'étendue, et tentant de ce chef des pensées qui imposent autant que faire se peut la raison de cette immanence étrangère qui le conditionne tout entier... Les ressorts de la science mentale sont au nombre de trois ; face au vouloir de la pensée il faut considérer la matière mentale elle-même définissant le but de l'affaire mathématique et sans tenir compte de laquelle le vouloir de la pensée n'aurait ni carrière, 'ni spécificité vraiment mathématique'. C'est dans un ajustement mutuel de ces trois ressorts de l'activité pensante, l'affaire intuitive immanente à l'actualité mentale, l'exigence logique et le vouloir penser, que la mathématique procède". Ibid., p. 114.

3. J. Ladrière, op. cit., p. 410.

se révèlent toutefois inséparables même dans les mathématiques modernes; un système total implique la fusion des deux notions.

Le théorème de Gödel, en démontrant les insuffisances de la stricte formalisation, prouve, en même temps, la nécessité de l'intuition dans le domaine mathématique. En quel sens, au juste, faut-il interpréter la démonstration gödélienne ? Elle comporte deux résultats principaux. Le premier établit qu'aucune preuve métamathématique ne peut suffire à démontrer la non-contradiction de 'toute' l'arithmétique. La validité de certains énoncés demeurera toujours extérieure à un système aussi étendu et, par suite, il subsistera des éléments d'incertitude dans une telle construction symbolique. Si la formalisation intégrale de la mathématique se révèle impossible, c'est que tout système formel exige une structure plus large qui englobe et justifie l'ensemble de ses formules. Comme le remarque Church[1], l'argument intuitif doit comprendre certains principes qui échappent à la formalisation; bref, tout système formel implique forcément l'existence d'une logique intuitive.[2]

---

1. Mathematical Logic, p. 111.

2. They (the formalists) do not attribute an intuitive reality to mathematical objects, nor do they claim that axiom express obvious truths concerning the realities of pure intuition; their concern is only with the formal logical procedure of reasoning on the basis of postulates. This attitude has a definite advantage over intuitionism, since it grants to mathematics all the freedom necessary for theory and applications. But it imposes on the formalist the necessity of proving that his axioms, now appearing as arbitrary creations of human mind, cannot possibly lead to a contradiction. Great efforts have been made during the last twenty years to

Si aucun formalisme intégral ne peut épuiser la mathématique, c'est qu'il s'avère, au surplus, 'essentiellement incomplet' à l'égard d'une telle science. C'est là une deuxième conséquence importante du théorème de Gödel. Cette conclusion fait d'ailleurs corps avec la première. Ce second résultat revient, lui aussi, à démontrer que le pouvoir de la méthode axiomatique est soumis à certaines limitations fondamentales. Supposons, en effet, que soit constitué un groupe cohérent d'axiomes mathématiques, certains énoncés authentiques de la mathématique ne pourront tout de même 'dériver' de cet ensemble de principes solidement établis.

En réduisant l'existence mathématique à la non-contradiction[1], Hilbert institua une méthode trop étroitement formaliste[2], un

---

find such consistency proofs, at least for the axioms of arithmetic and algebra for the concept of the number continuum. The results are highly significant, but success is still far off. Indeed, recent results indicate that such efforts cannot be completely successful, in the sense that proofs for consistency and completeness are not possible within strictly closed systems of concepts. Remarkably enough, all these arguments on foundations proceed by methods that in themselves are thoroughly constructive and directed by intuitive patterns". Courant and Robbins, What is Mathematics ? p. 215. - "Dans l'impossibilité d'édifier un système purement rationaliste, faute d'un appareil formel tirant de lui-même la preuve de sa non-contradiction, la doctrine de la connaissance mathématique où l'on prend en compte les échanges entre problèmes et synthèse globale regagne du moins une partie du terrain qu'on avait perdu en concédant à l'empirisme". G. Bouligand, Le Déclin des absolus mathématico-logiques, p. 53.

1. "A proposition which is not self-contradictory is, according to the Logistic school, a true existence statement". Kasner, Mathematics and the Imagination, p. 62. - Voir : Ernst Cassirer, Substance and Function, p. 299; J. Ladrière, op. cit., p. 25; G. Bouligand, Le Déclin des absolus mathématico-logiques, pp. 93-94; etc.

2. "... Dans l'esprit de Gauss, la vérité mathématique des énoncés

procédé qui n'admettait comme valables que les modes de résolution mécaniques pour les problèmes d'existence. Une logique ainsi réduite à une manipulation symbolique soumise à des règles spécifiques tombe, toujours d'après le théorème de Gödel, sous l'interdit de la régression infinie. Les règles d'une pure combinatoire ne peuvent, en effet, y échapper. Or, d'après l'opinion certainement fondée d'Aristote, le processus à l'infini d'une série abolit la validité de cette dernière. Il nous faut admettre, en conséquence, une logique intuitive au fondement de cette logique dite formelle, qui se ramène, en définitive, à un pur jeu de symboles.

Les travaux de Gödel et de Church ont contribué à mettre en évidence les limitations de la méthode formaliste sans, pour autant, en nier totalement l'utilité. On a vu, au contraire, que le recours à la formalisation s'imposait en mathématique, pour des raisons de rigueur démonstrative. Les résultats de Gödel et de Church

> "ont simplement précisé en quel sens et avec quels outils celle-ci (c'est-à-dire la tentative hilbertienne) pouvait être poursuivie. La distinction entre théorie et métathéorie reste acquise, les

---

d'un système est tout autre chose que la non-contradiction de l'ensemble de ces énoncés entre eux. L'ensemble des énoncés de la géométrie euclidienne est non contradictoire; il en est de même de l'ensemble des énoncés de la géométrie hyperbolique. Elles ne peuvent cependant pas être vraies, l'une et l'autre, au sens où Gauss entend la vérité géométrique, puisque l'absence de contradiction ne s'étend pas au système qui les contiendrait l'une et l'autre. On n'a donc pas le droit de prétendre que la vérité mathématique d'une théorie soit garantie par sa simple cohérence (ou consistance) logique. La vérité mathématique est quelque chose de plus profond, de plus essentiel". F. Gonseth, La Géométrie et le problème de l'espace, VI, p. 94.

> problèmes métathéoriques (et en particulier celui de la non-contradiction) restent posés, mais les cadres métathéoriques ont dû être assouplis et élargis et, par là, la notion d'existence mathématique a reçu une interprétation moins rigide que dans la pensée hilbertienne". 1

Bref, continue le même auteur,

> "il faut voir que les limitations dont il s'agit n'ont pas un caractère absolu. Elles ne signifient pas que la méthode formelle est vouée à la stérilité, elles en circonscrivent seulement le champ d'efficacité". 2

A côté du problème des limitations internes de tout formalisme et des multiples autres difficultés que doit affronter la logistique, se présente la question fondamentale de la continuité de la logique et des mathématiques. On a touché ce problème en montrant les divergences qui s'affirmaient entre la logique formelle traditionnelle et la logistique. Il sera utile de compléter les remarques déjà faites à ce sujet, en le considérant dans une perspective plus générale. La position prise ici s'établirait brièvement comme suit : la logique et la mathématique sont des sciences irréductibles; leurs

---

1. J. Ladrière, op. cit., p. 404.

2. Ibid. - "... The mathematician Gödel recently showed that, in principle, in order to furnish a consistency proof of a formal system one needs means that go beyond what is formalized in the system. That does not necessarily mean a failure of Hilbert's efforts, but it shows that metamathematics does not get around the questions thrown into the discussion by the intuitionists. The opposition between the formalists and the intuitionists, which was originally so violent and apparently irreconcilable, seems gradually to reduce to this : on the one hand, Hilbert's formal mathematics comprises more than a formalization of Brouwer's

nombreuses affinités ne doivent pas nous donner le change sur ce point. Or, dans un certain genre de mathématiques modernes, on a vite fait de quitter le domaine mathématique pour pénétrer, à son insu, dans le champ de la pure logique. A-t-on raison de considérer une telle activité comme spécifiquement mathématique ?

En ce qui concerne l'assimilation de la logique et des mathématiques, il semble qu'elle résulte de la confusion entre la 'présentation' des mathématiques et leur 'nature intime'.[1] Si la déduction logique constitue une partie fondamentale des mathématiques, leur mode d'exposition ne devrait pourtant pas nous faire perdre de vue leurs implications essentielles. Euclide a utilisé le processus logique de démonstration en mathématiques sans en venir, comme Whitehead et bien d'autres, à l'exagération de la déduction absolue.[2] C'est que Euclide, tout comme Aristote, concevait la logique et les mathématiques comme des sciences distinctes par leur sujet et leurs principes.

---

mathematics could yield, but on the other hand, the metamathematics, which is indispensable in Hilbert's total structure, has to incorporate essential ideas of Brouwer's intuitionism". Richard Von Mises, Mathematical Postulates and Human Understanding, p. 1752.

1. Thomas Greenwood, op. cit., I, p. 62.

2. D'ailleurs dans la plupart des travaux hautement déductifs de la logique symbolique, l'élan créateur des facultés intuitives vient soutenir l'effort de la pensée. Et les résultats obtenus n'auraient jamais vu le jour si leurs auteurs n'avaient été guidés, dans la suite de leurs raisonnements les plus serrés, par une certaine intuition de l'issue possible de leurs démarches. Ibid., p. 63.

La logique s'applique, en effet, à la considération des relations de raison que l'intelligence découvre parmi ses concepts. Cet ordre des concepts se dénomme encore, comme on le sait, celui des intentions secondes. Cette science commune du raisonnement a comme fin de diriger l'acte même de la raison dans son mouvement vers la vérité. La logique devient pour l'intelligence un instrument indispensable pour atteindre le vrai dans toutes les sciences. C'est dire que le rôle de la logique est universel; il ne saurait se limiter à un secteur de la science, pas même au domaine de la quantité.

La logique comporte, en outre, des principes appropriés à sa fin commune. Ce sont les définitions des divers concepts logiques fondamentaux qui servent de principes de démonstration dans cette science des relations de raison. La logique ne s'applique cependant pas à l'étude des relations pour elles-mêmes: elle est ultimement déterminée par la vérité. Elle rend la raison habile, non pas, avant tout, à découvrir une multitude de relations entre des objets, mais à marcher, d'un pas sûr et dans n'importe quel domaine de la science, vers le vrai. Par là, en passant, elle prend le contre-pied de la logistique qui, selon Russell, ne s'inquiète nullement de la vérité des objets qu'elle considère.

La mathématique, réduite à son domaine propre, comporte un sujet et des principes beaucoup plus restreints que la logique. La mathématique se limite à l'étude de la quantité et de ses propriétés. Ses principes, elle les puise dans le domaine du continu et du discret. Les définitions de l'un prédicamental, du point, de la ligne, etc. fondent seuls les démonstrations mathématiques. Dès qu'on quitte le champ de la quantité, soit continue, soit discrète, pour s'étendre à la considération de relations, de fonctions, etc. purement logiques, on ne fait plus proprement des mathématiques, mais bien de la logique.[1] D'où il résulte que le progrès des mathématiques, rendu possible par une étude de plus en plus poussée des notions qui leur sont propres, ne s'opère pas nécessairement dans le sens indiqué par la logistique. Il faut chercher à développer les mathématiques dans la ligne de leur sujet (car ces sciences, comme toute autre discipline spéculative, tendent, en définitive à une connaissance parfaite de leur sujet, la quantité) et non pas viser, à la faveur d'une transgression des genres simulée, à établir une sorte de prépotence de la mathématique désormais confondue avec un logicisme universel.

L'impossibilité totale de réussir la tentative d'identification de la logique et de la mathématique, en plus de se fonder sur la nature de ces sciences respectives, relève aussi, en un sens, de la diversité de leurs fins. La mathématique comporte une fin intrinsèque : la connaissance de la quantité; la logique, à titre d'ins-

---

1. "... Les mathématiques ont une 'matière' et une consistance intrinsèque que la logique ne suffit pas à poser... Avec la mathématique formelle, nous ne pouvons plus parler de l'objet de la mathématique au sens coutumier de cette locution. Nous ne pouvons plus parler que d'une actualité de la mathématique, demeurant en puissance, une puissance encore essentiellement polyvalente et indéterminée, de parties objectives. Nous passons du régime épistémologique de la pensée adhérente à quelque chose, au régime épistémologique de la pensée déjà de quelque façon pensée de pensée, puisqu'en mathématique formelle nous tentons de penser scientifiquement le projet de la pensée". Quelques notes tirées des Remarques sur la philosophie de la formalisation logico-mathématique, dans Revue de Métaphysique et de Morale, 1955, no 4, p. 353, par le R. P. DUbarle.

trument de la science, joue, au contraire, un rôle essentiellement 'utile'; elle se tient plutôt dans l'ordre des 'moyens'. Et dès lors, elle implique une fin, pour ainsi dire, extrinsèque, qui est la 'vérité' atteinte par la raison dans une science donnée, par exemple, dans les mathématiques. Imposer à ces dernières les dimensions de la logique revient à leur confier un rôle purement instrumental (car on n'étudie pas la logique pour elle-même), c'est-à-dire, en pratique, à détourner le mathématicien de la recherche fondamentale pour le confiner dans le domaine de l'application. C'est ce qui semble effectivement se produire de nos jours. Et certains mathématiciens et même des physiciens y voient un obstacle sérieux au progrès de la science.[1]

Pour les raisons fondamentales mentionnées et pour plusieurs autres causes qu'une réflexion attentive découvrira aisément, on doit affirmer que toute tentative d'assimilation des mathématiques à la logique est d'avance vouée à l'échec. Le procédé déductif utilisé dans la présentation des mathématiques ne peut, en effet, rien dire sur le contenu de la théorie exposée; si des considérations mathématiques (par exemple, sur le nombre) nous élèvent peu à peu aux perspectives plus générales de la logique, on quitte alors le domaine quantitatif, qui demeurera toujours le terrain spécifique des mathématiques. Depuis quand, en effet, la multiplication des relations entre des objets contribue-t-elle, de soi, à définir ou à simplement éclairer les termes de ces relations ?

---

1. Voir : J. Rossel, <u>Caractéristiques, Tendances et Implications de la Recherche atomique actuelle</u>, dans Dialectica, 11, 1957.

La formalisation intégrale des mathématiques modernes trouve son fondement dans une axiomatique appropriée. Le passage à la limite du processus déductif euclidien ne pouvait conduire, de soi, à une logicisation aussi poussée : les principes du système s'y opposaient. C'est ce qu'il s'agit maintenant de faire voir.