Chapitre 6

Principes euclidiens et Axiomatique moderne.

La méthode axiomatique, en général, s'établit à partir de principes fondamentaux dont les autres, plus restreints, découlent selon les lois de la logique.[1] Les axiomatiques se distingueront donc avant tout d'après les énoncés de la théorie et aussi d'après les lois de dérivation réciproque de ces principes.

L'axiomatique ancienne,[2] dénommée encore axiomatique classique, concrète ou intuitive, se caractérise, en premier lieu, par l'importance accordée à l'intuition dans la découverte des énoncés primitifs. Le raisonnement déductif se présente, en effet, comme un enchaînement de propositions dont la vérité dépend de données antérieures. Or, comme, en démonstration, la régression à l'infini annule le raisonnement, on doit, de toute nécessité, aboutir à des notions premières qui relèvent directement de la connaissance intuitive. Ainsi, la théorie déductive portée à un si haut degré de perfection par les Grecs, dépendait tout entière d'un recours initial et même prolongé, à la saisie intuitive. De sorte que Poincaré pouvait écrire avec justesse que "dans cette vaste construction où les anciens ne trouvaient aucun défaut logique, toutes les pièces sont dues à l'intuition.

---

1. "La méthode axiomatique consiste essentiellement, écrit Ladrière, à isoler, dans une théorie, certains énoncés que l'on considère comme fondamentaux et dont les autres peuvent être dérivés par le moyen des règles logiques du raisonnement". *Op. cit.*, p. 35

2. Pour l'exposé de l'axiomatique ancienne, cf. Partie I, 1ère section.

tuition.[1]

Dans l'arsenal des formes intuitives, les anciens géomètres ont tout d'abord puisé des propositions primitives immédiates, c'est-à-dire des énoncés dont la vérité ressort de la signification même des termes et doit ainsi être admise sans démonstration. Car, on le verra, la 'vérité' des prémisses entre comme condition essentielle de la validité matérielle de la conclusion dans un syllogisme déductif. A l'arrière-plan de toute argumentation géométrique, Euclide place les 'axiomes' ou 'notions communes'. Ces propositions apparaissent comme des lois logiques appliquées au domaine de la quantité. Ces énoncés généraux étroitement apparentés au principe de contradiction, comportent toujours, en effet, une référence au contexte quantitatif : grandeur, égalité, tout, partie, etc... (ex. d'axiome : 'le tout est plus grand que n'importe quelle de ses parties.)[2] En raison de leur universalité, les axiomes n'entrent point, à titre constitutif, dans une démonstration géométrique : ils règlent, comme de l'extérieur, les démarches de la raison. S'ils président ainsi, de façon permanente, au mouvement de l'intelligence vers la vérité, et s'ils assurent constamment la sécurité de ses progrès, c'est que ces principes jouissent d'un luxe d'évidence qui emporte l'assentiment de la raison et qui n'admet même pas la possibilité du doute à leur égard. La contradic-

1. R. Blanché, L'Axiomatique, p. 7.

2. A noter toutefois que les noms 'tout' et 'parties' ont reçu des impositions telles (par ex. 'tout logique', 'partie subjective') que l'axiome ne pourrait s'appliquer.

toire d'un axiome euclidien n'a qu'une possibilité grammaticale.

A côté ou plutôt en-dessous des axiomes, et dans un domaine plus proprement géométrique, Euclide place les 'postulats'. Au cours de ses déductions, l'auteur des Eléments invoque souvent de tels principes, apparemment démontrables (du moins par une science autre que la géométrie), mais dont l'évidence intuitive suffit à justifier l'emploi. Ainsi, qui douterait qu'entre deux points on ne puisse mener qu'une droite ? ou bien que par un point situé en dehors d'une droite, une seule parallèle à cette droite ne soit possible ? ou enfin que toute droite ne puisse être prolongée indéfiniment ? L'évidence propre au postulat se révèle toutefois moindre que celle qui caractérise l'axiome.[1] La contradictoire du postulat demeure, quoique difficilement, concevable. Pour éviter de nuire à l'intelligibilité essentielle des postulats (aussi bien que des axiomes) on doit les énoncer dans des termes parfaitement clairs.

La rigueur démonstrative exige-t-elle, d'autre part, une formulation explicite de tous les postulats, ou s'accommode-t-elle, au contraire, de propositions implicites qu'on utiliserait, sous forme de demande, au cours d'une argumentation ? On verra l'opinion moderne

---

1. "Il est des propriétés qu'on admet 'a priori' sans démonstration, au début d'un raisonnement déductif. On les nomme axiomes (dans l'acception classique du mot; car... il a été récemment détourné de son sens) ou, éventuellement, 'postulats', suivant qu'on les considère comme absolument évidentes ou comme d'une évidence moins parfaite". Encyclopédie Française, 1·52-5.

sur ce point. Euclide ne se fait pas faute de recourir, dans ses raisonnements, à une foule de propositions implicites, qui se justifient, comme tout postulat, dans l'intuition.[1]

Les figures viennent se joindre aux axiomes et aux postulats, comme principes de démonstrations géométriques, chez Euclide. Il existe, en effet, certaines définitions 'constructives', dont la figure fait partie intégrante. Ainsi, la suppression de la figure dans certaines démonstrations 'opératives' comme, par exemple, dans la première proposition d'Euclide, (qui est un problème[2]) équivaudrait à une abolition de la preuve. Et même pour les autres genres de démonstrations classiques, les figures semblent bien s'imposer; la découverte des propriétés d'un concept géométrique paraît exiger le recours aux diagrammes concrets : la construction vient 'révéler', 'actualiser' la

---

1. Ainsi, il utilise la proposition suivante, énoncée nulle part auparavant : si une droite a deux points dans un plan, elle y est tout entière contenue. - Une analyse attentive des axiomes et postulats de la géométrie classique a révélé qu'un bon nombre de ces propositions n'avaient pas été formulées, mais utilisées de façon implicite dans les démonstrations. Hilbert, dans ses Fondements de la Géométrie, a donné un système complet d'axiomes pour la géométrie euclidienne. Voir : J. Ladrière, op. cit., p. 15; R. Blanché, L'Axiomatique, pp. 8-9; etc.

2. Il se pose comme suit : construire un triangle équilatéral sur un segment de droite donné AB.

notion cachée dans la potentialité du simple donné.[1]

Euclide pose encore la définition comme principe de démonstration. Ainsi, les définitions de l'unité, du point, de la ligne, de la surface, du cercle, etc., se présentent comme des principes où les théorèmes puisent toute leur vigueur démonstrative. La conclusion découle tout entière de cet énoncé qui exprime la nature même du sujet considéré.

Ainsi, axiomes, postulats et définitions figurent, dans le système euclidien, comme le fondement de la déduction géométrique. Et ces principes tirent leur valeur de leur seule vérité. Car le but de la démonstration mathématique consiste à mettre l'intelligence en possession du vrai. Or la validité matérielle de la conclusion s'appuie, de toute nécessité, sur la vérité des prémisses. Celles-ci étant vraies absolument, si le raisonnement se révèle correct dans sa forme, telle proposition déduite de ces principes est aussi nécessairement vraie. La démonstration mathématique passait pour la plus catégorique. Aristote l'appelait le syllogisme du nécessaire. Les mathématiques réalisaient la certitude la plus parfaite.

Le système euclidien, par ses appels à l'intuition élémentaire, par son recours à l'évidence, par son utilisation d'un mode de pensée que les Grecs avaient porté à une haute perfection, a régné en

1. Voir : saint Thomas, In IX Metaph., lect. 10, 1888-1894 : "Geometrae enim inveniunt verum quod quaerunt, dividendo lineas et superficies. Divisio autem reducit in actum quod erat in potentia". Etc.

souverain pendant plus de vingt siècles. Sa principale force a surtout résidé dans son attachement à la vérité extérieure à la forme syllogistique elle-même. Le renseignement sur les choses (sur les natures), que procurait le théorème géométrique, bénéficiait du mode déductif le plus évolué; la vérité 'objective' s'accompagnait d'une vérité formelle ou vérité de raison propre au 'mode de présentation'. Cette dualité d'aspect du vrai géométrique s'observe-t-elle encore dans les mathématiques modernes ou ne néglige-t-on pas, au contraire, le contenu pour le cadre ? C'est ce qu'on va voir en essayant de mesurer la distance qui sépare, au point de vue de l'axiomatique et donc, en définitive, de la science mathématique tout entière, la conception moderne de la pensée traditionnelle.

Par quoi, en effet, se caractérise la méthode axiomatique moderne comparée à l'ancienne ?

> "Alors que l'axiomatique ancienne est une axiomatique 'à contenu' où l'on utilise des concepts fondamentaux dont le sens est donné de 'façon intuitive' et où l'on affirme des propositions considérées 'comme évidentes' à propos de ces concepts, l'axiomatique moderne est une axiomatique 'pure' : les concepts qu'elle utilise sont tous introduits 'explicitement' et sont 'définis uniquement par les relations' qui sont affirmées entre eux, on ne fait 'jamais appel à des propriétés qui ne seraient pas énoncées explicitement' dans les axiomes, et enfin ceux-ci 'ne sont pas considérés comme évidents par eux-mêmes' ils sont simplement 'posés comme valables' et l'on voit ensuite ce qu'on peut en déduire. Les théories axiomatisées prennent l'allure de 'systèmes hypothético-déductifs'". 1

---

1. J. Ladrière, op. cit., p. 15. - Un système axiomatique est la "forme achevée que prend, aujourd'hui, une théorie déduc-

Ce texte condense, comme on le voit, les principaux traits des deux méthodes axiomatiques. Il suffira ici d'élaborer quelque peu les idées émises sur le système moderne.

Les éléments primitifs d'une théorie mathématique moderne présentent, bien que parfois sous une identité de noms, la divergence la plus marquée avec les principes euclidiens. Ces derniers contenaient, comme on l'a souligné, un message de vérité indépendant de la validité de la structure logique qui formait le cadre de sa présentation. Les postulats modernes se situent, pour ainsi dire, par delà le vrai et le faux; ils tirent tout leur sens de la fonction qu'ils sont appelés à remplir à l'égard des propositions qui en découlent. Car la seule question qui confronte le pur mathématicien se réduit à celle-ci : les conclusions obtenues résultent-elles de façon logiquement rigoureuse, absolument nécessaire, des prémisses adoptées ? Ces dernières une fois posées, si l'appareil logique ne recèle aucun défaut, les propositions acquises sont légitimes.

Mais quel principe guide le mathématicien dans le choix de ses axiomes ? L'arbitraire. Les postulats, bien loin d'être affirmés à titre de vérités fécondes, sont posés comme de simples conventions, de pures hypothèses. Le mécanisme logique peut fonctionner, comme on le sait, sans avoir égard à la vérité de ses propositions;

---

tive"; c'est un système où sont "totalement explicités les termes non définis et les propositions non démontrées, ces dernières étant posées comme de simples hypothèses à partir desquelles toutes les propositions du système peuvent se construire selon des règles logiques parfaitement et expressément fixées". R. Blanché, <u>op. cit.</u>, p. 3.

d'ailleurs, Aristote lui-même ne l'a-t-il pas enseigné en traitant de la forme du syllogisme ? Fort de cette loi, on 'pose' librement des principes jugés 'convenables' et on en déduit, en toute rigueur formelle, le groupe entier des théorèmes d'une géométrie. L'ensemble de ces conclusions 'vaut' par le seul fait d'avoir été établi au moyen d'un syllogisme impeccable quant à la forme.

Si la question de vérité et de fausseté n'intéresse plus le mathématicien, mais seulement le philosophe[1], les axiomes et les postulats vont se confondre dans les mathématiques modernes. Car la distinction de ces principes provenaient, chez Euclide, de l''éclat' plus ou moins grand de leur 'vérité' ('fulgor veritatis'), c'est-à-dire de leur évidence objective : les premiers étaient indémontrables, les seconds démontrables par les principes d'une autre science. De nos jours, le 'convenable' fait loi quand il s'agit de poser les propositions élémentaires d'un système; si ces 'hypothèses' me permettent de déduire tel ensemble de propositions, elles sont 'bonnes' pour moi, 'valides' pour le système en vue. Car, on l'admettra, 'l'évidence' a joué de vilains tours aux mathématiciens, dans le passé. Aussi sa notion est-elle maintenant devenue suspecte. Ce 'sentiment', s'il fallait y céder, nous conduirait à l'erreur. D'ailleurs son domaine ne varie-t-il pas avec le tempérament intellectuel de chacun! Beaucoup de principes et de théorèmes que l'intuition refusait ont été reconnus exacts par une critique plus objective, c'est-à-dire

1. B. Russell, <u>Mathematics and the Metaphysicians</u>, p. 1587.

moins intuitive. De plus, certains esprits plus exigeants rejetteraient tel axiome reconnu 'évident' par d'autres.

> "Au reste, le rôle qu'on a longtemps fait jouer à l'évidence est lié à l'idéal d'une mathématique catégorique... il s'amenuise dans une conception hypothético-déductive, axée sur l'idée de cohérence logique plutôt que sur celle de vérité absolue". 1

Le souci de rigueur scientifique moderne a condamné, par son rejet de l'intuition et de l'évidence, l'usage des postulats 'implicites' souvent utilisés par Euclide. L'emprise logique se révèle totale dans l'axiomatique moderne. Aussi, rien ne doit échapper, pas même à titre de présupposé initial, à la manipulation lucide de la raison. Celle-ci doit contrôler toutes et chacune de ses démarches, sans faiblesse ni erreur, pour que l'ensemble des conclusions acquises présente le maximum d'exactitude formelle. Voilà pourquoi, toutes les propositions primitives doivent être 'explicitées', chaque axiome nouveau clairement déterminé, et non pas laissé à l'intuition. Celle-ci ne se voit pratiquement plus confier aucun rôle dans le mécanisme démonstratif moderne.

La définition elle-même a perdu ses titres à un usage démonstratif valide dans les systèmes contemporains. D'ailleurs, ranger la définition parmi les principes premiers constitue une erreur logique surprenante, de l'avis des mathématiciens les plus rigoureusement formalistes. Car, de même que la démonstration doit se résou-

---

1. R. Blanché, op. cit., p. 11.

dre, pour éviter la régression infinie, en des propositions immédiates, ainsi, la définition se réduira-t-elle à des 'termes indéfinissables'. Ce sont ces derniers qui joueront le rôle de principes dans une théorie déductive et non pas les définitions, qui ne sauraient tenir d'elles-mêmes le statut de leur validité. D'ailleurs les définitions euclidiennes, bien loin d'expliciter des principes essentiels, se ramènent, pour les mathématiciens modernes, à de simples 'désignations', à de pures définitions nominales. Un théorème qui tire toute sa substance de tels énoncés ne saurait présenter de fortes garanties de validité.

Ces termes premiers auxquels s'enchaînent toutes les démonstrations modernes, faut-il leur conserver une signification intuitive ou les considérer tout simplement comme dénués de sens ? Le contexte empirique, on l'a noté, ne saurait entrer dans le jeu; on ne peut, d'autre part, faire abstraction de toute référence à un sens quelconque. Tout en se gardant de faire aucune hypothèse sur la nature de ces entités (par exemple, du point, de la droite, du plan...), on retiendra le sens que leur confèrent les 'relations' qu'expriment les axiomes.[1] Comme les postulats se ramènent à de pures conventions, on conçoit les flottements de sens que les mêmes termes peuvent subir, dans des systèmes différents. Par conséquent, il n'existe plus de termes premiers universels, quant à la signification, en mathématique telle qu'on la conçoit de nos jours. Et ces définitions des termes

1. Cf. J. Dieudonné, Les Méthodes Axiomatiques modernes et les Fondements des Mathématiques, dans Revue Scientifique, 77, 1939.

'par postulats' arbitraires limitent l'usage de ces mêmes termes aux dimensions d'un systeme. Comme l'a dit Poincaré, l''ensemble' des postulats euclidiens constitue une définition implicite de l''ensemble' des notions euclidiennes; et il en est ainsi des autres axiomatiques.

En plus des termes primitifs, les figures entrent en ligne de compte dans la considération des principes d'une théorie déductive mathématique. On a vu l'importance qu'Euclide attachait à ces formes concrètes; elles entraient, dans son système, à titre d'élément indispensable. Le rôle accordé par lui à l'intuition l'ont incité, d'autre part, à passer sous silence bien des postulats relatifs à la construction et à la manipulation des figures, sans l'empêcher d'utiliser ces axiomes à chaque pas. La spéculation mathématique moderne a-t-elle besoin du secours des figures ? Lisons ce qu'en dit Bouligand :

> "On peut concevoir, écrit-il, la géométrie sous diverses espèces. La plus familière est celle dont les déductions s'accompagnent de figures. La présence de ces dernières autorise, chez la plupart des auteurs, certains raccourcis du raisonnement. D'autres raréfient les figures : leur exposé en revêt une forme plus minutieuse. Avec un peu d'esprit de système, on en vient à supprimer la figuration. Les notions de base (point, droite, plan...) deviennent alors simples vocables... : dépouillées de leurs caractères sensibles, ces notions ne prennent place dans le monde géométrique actif que par la réglementation à laquelle les soumettent divers postulats. La géométrie acquiert, dans cette voie, la forme axiomatique". 1

---

1. La Mathématique et son Unité, p. 235. - "... Formerly, it was held by philosophers and mathematicians alike that the proofs in Geometry depended on the figure; nowadays, this is known to be false. In the best books, there are no

Le degré 'd'abstraction' que présente une mathématique ainsi ramenée à la pure déduction logique, permet au raisonnement d'avancer sans l'appui de notions trop précises et concrètes; la logique se passe fort bien, en effet, de figuration.

Par le bref exposé précédent, on a pu se rendre compte que l'évolution des mathématiques va de pair avec le perfectionnement des théories axiomatisées. De l'axiomatique euclidienne au système formel pur, les étapes paraissent assez claires. Ladrière[1] distingue quatre stades d'évolution mathématique, qui se caractérisent par l'élimination progressive de l'intuition : (1) l'axiomatique intuitive, dont les Eléments d'Euclide constituent l'excellent modèle. L'intuition, on l'a vu, y joue un rôle fondamental, quant aux énoncés primitifs aussi bien qu'au mouvement déductif; (2) l'axiomatique abstraite, où l'on précise le 'contenu' des concepts de base, en n'en retenant toutefois que certaines propriétés; (3) l'axiomatique formelle, qui n'accorde plus aucune attention au 'contenu' des concepts fondamentaux. Leur sens est fixé par les 'relations' établies entre eux par les axiomes. Mais certaines expressions du langage courant retenues dans les postulats font encore un appel discret à 'l'intuition'. Ex. Le

---

figures at all. That reasoning proceeds by the strict rules of formal logic from a set of axioms laid down to begin with. If a figure is used, all sorts of things seem obviously to follow, which no formal reasoning can prove from the explicit axioms, and which, as a matter of fact, are only accepted because they are obvious. By banishing the figure, it becomes possible to discover 'all' the axioms that are needed; and in this way all sorts of possibilities, which would have otherwise remained undetected, are brought to light". B. Russell, Mathematics and the Metaphysicians, p. 1588.

1. Op. cit., pp. 36-37.

système de Peano; (4) le système formel pur, qui élimine 'toute référence extérieure au système lui-même'. Il suppose, dès lors, la création d'une symbolique très précise et une détermination minutieuse des procédés de déduction. Le rôle de l'intuition se réduit à l'identification, la distinction et au remplacement des signes.

L'évolution s'est donc opérée dans le sens de 'l'intériorisation'. Le système euclidien cherchait à découvrir et à mettre en évidence un monde d'objets, un ensemble de vérités de nature 'extérieures' à la théorie elle-même; le formalisme a tenté de créer sa propre justification; il a voulu vivre de sa propre substance; il a essayé de couper tout lien de dépendance à l'égard de données étrangères au système. Sans y réussir totalement, il a déployé un effort méritoire, qui a porté ses fruits.

Pour nous, il importe de mesurer l'éloignement qui sépare le système ancien de la construction récente. Une considération attentive de ces deux édifices mathématiques révèle qu'ils ne comportent presque plus rien de commun.

> "Le passage à l'axiomatique formelle, remarque encore Ladrière, modifie profondément le sens de l'axiomatique : la priorité qui est accordée aux énoncés de départ devient en effet entièrement relative. Elle n'est plus fondée sur la simplicité ou sur un degré plus grand d'évidence, mais seulement sur la 'commodité'. Le choix des énoncés initiaux devient entièrement arbitraire. En principe, n'importe quel système d'énoncés peut être pris comme système d'axiomes : la seule chose qui importe, c'est que l'on puisse effectivement en déduire toute la

théorie. En d'autres termes, le système axiomatique n'a plus pour but de faire apparaître l'ordre naturel qui existe entre les énoncés d'une théorie, mais d'introduire un ordre qui, en soi, peut être quelconque. On demandera simplement au système de répondre à certaines conditions de simplicité et de clarté et ce sont ces critères qui commanderont le choix des axiomes : ce qu'il faut obtenir, c'est l'élimination de toute ambiguité". 1

De catégorico-déductive, la mathématique est ainsi devenue hypothético-déductive. Cependant, pour parcourir cette route, elle a subi une série de 'crises' toujours graves et dont quelques-unes persistent. Gonseth a signalé, en effet, "à côté de la crise de l'évidence, la crise de l'intuition, depuis longtemps ouvertes, il constate en outre une crise de la définition et plus : une crise de l'idée même de démonstration".[2] Et ces crises se sont liquidées (du moins en partie) en abandonnant le terrain de 'l'objet', pour se tourner vers le domaine du 'subjectif'. La seule donnée 'objective' qu'on semble avoir conservée se réduit aux lois d'une certaine logique formelle.[3] Le choix des termes primitifs et des axiomes (données évidemment fondamentales d'une théorie) relèvent, on l'a vu, de l'arbitraire. Certaines questions se posent toujours au sujet de tels énoncés élémentaires. Par

---

1. Op. cit., pp. 37-38.

2. Cité par G. Bouligand, Le Déclin des Absolus mathématico-logiques, p. 57.

3. Il faut toujours noter que 'logique', au sens moderne, réfère au calcul mécanique. De là découlent les différences fondamentales (rappelées au chap. 5) qui séparent ce système de connaissances de la discipline ancienne.

exemple, sont-ils 'vrais' ? On nous répond : Ni vrais, ni faux, mais 'commodes'.[1] Ne contiennent-ils pas une incompatibilité cachée ? Quel est leur degré de certitude à l'égard du système en vue ? Se révèlent-ils comme 'les plus' commodes ou simplement comme 'certainement' convenables ? L'incertitude la plus tenace[2] règne à leur sujet; la question des fondements se repose sans cesse :

> "When anyone, on any occasion, wants to give an example of an absolutely certain and indubitable truth, he does not hesitate to cite some mathematical theorem known to him... If thus the results of mathematical rules are taken as completely and unshakably true, one should think that this is even more the case with the general foundations from which such results are derived. Nothing is more astonishing for the layman than to hear that among mathematicians there are differences of opinion as to the basic principles of mathematics - their meaning, their applicability, and their content. If, moreover, an eminent contemporary mathematician declares that the present uncertainties by no means concern merely questions on the frontier of mathematical knowledge but go directly to its core, then the general naïve faith in the 'most absolute' of all sciences must be completely shaken". 3

---

1. Voir : Poincaré, La Science et l'Hypothèse, p. 66; Richardson, Fundamentals of Mathematics, p. 437.

2. La contradiction se révèle toujours redoutable : "Les postulats ne doivent jamais conduire à une incompatibilité. Telle est la condition sine qua non de leur existence.
   Nous ne savons, sauf dans des cas relativement insignifiants, si un système donné de postulats est cohérent et s'il ne conduira jamais à une contradiction". E. T. Bell, La Mathématique, reine et servante des sciences, trad. de R. de Saint-Seine, p. 41.

3. Richard von Mises, Mathematical Postulates and Human Understanding, p. 1744. - ... Ces flottements, ce désarroi du raisonnement dans la science regardée comme la plus sûre de

La certitude toute relative des fondements se propage le long des lignes déductives pour aboutir à une conclusion plus fragile encore. L'objet d'une science hypothético-déductive doit, de toute nécessité, participer de l'hésitation des prémisses. Aussi Bouligand insiste-t-il sur la nécessité d'abandonner une conception rigide de la science mathématique.[1] L'ancien concept de 'rigueur mathématique' s'est transformé;[2] il est passé du contenu à la structure; de la vérité extrinsèque à la cohérence interne; du conséquent à la conséquence logique. Bref, la solidité de la connaissance objective a cédé le pas devant la perfection de l'armature logique : "La perfection propre aux mathématiques ne saurait être que là où le raisonnement est rigoureusement logique".[3] Au fond, on raisonne[4] avec une rigueur impeccable sur des hypothèses. Comment juger d'une telle science ? Faut-il l'assimiler à une dialectique, au sens aristotélicien du terme ? On

toutes, nous montre sur le vif 'la fragilité de nos certitudes les plus fortes". Les Grands Courants de la Pensée mathématique, art. de A. Denjoy. - "Les théories de ce genre (c'est-à-dire mathématiques contemporaines) forment une littérature énorme et très difficile, à la fois à cause du sujet, à cause de l'imperfection des notations, des rectifications perpétuelles, de l'obscurité des exposés, enfin et surtout de 'l'incertitude touchant les principes réellement admis'". R. Poirier, Le Nombre, Intr., p. 8.

1. G. Bouligand, Le Déclin des absolus mathématico-logiques, p. 173.

2. L. O. Kattsoff, A Philosophy of Mathematics, p. 6.

3. B. Russell, Mysticisme et Logique, p. 58.

4. C'est un raisonnement qui, comme on l'a noté, s'assimile à un calcul.

le verra sous peu. Auparavant, il importe de bien comprendre qu'en plus de transférer la certitude de l'objet à l'instrument de connaissance, on a transformé, par la force des choses, le concept même d'évidence et de certitude mathématique : on en a fait une question 'subjective'. Ce qui devient, dit Gonseth, la garantie de la méthode mathématique, c'est la 'conscience collective de la science'. Ce n'est pas, en définitive, une justification métaphysique, extérieure à toute connaissance de tout horizon de réalité, ce n'est pas une instance absolue. "Le rôle qui était dévolu à l'objectivité parfaite, à la vérité éternelle, à la raison pure doit être désormais assumé par une conscience vivante", c'est-à-dire, comme on l'a vu, la conscience collective de la science, qui vit 'd'une vie historique et actuelle'. C'est par rapport à elle, l''instance dernière de la science', qu'à chacun il est permis de juger.[1] Comme cette conscience, fondement de la certitude 'scientifique', est soumise aux variations de l'opinion, la 'discipline' mathématique, "sous la pression de problèmes, forme un système en expansion 'sans cesse aménagé et révisé'".[2]

---

1. Voir : G. Bouligand et Jean Desgranges, Le Déclin des absolus mathématico-logiques, pp. 133-134. - "L'évidence n'est pas une chose absolue, qui s'impose et qu'on ne puisse discuter : elle est subjective, elle a ses degrés". F. Gonseth, Les Fondements des Mathématiques, p. 13.

2. Ibid., p. 167. Dans la page suivante citée par Jean Desgranges, Ibid., p. 202, Abel Rey dégage la tendance la plus générale de la philosophie mathématique contemporaine : "Presque jusqu'à la fin du XIXe siècle règne en gros un aspect souverain de la connaissance qu'on pourrait appeler la conscience du définitif. La pensée après un gigantesque effort, croit avoir atteint ses colonnes d'hercule. Marche synthétique des mathématiques à partir des notions de nombre entier d'une part,

Elle ressemble, à ce point de vue, à la physique mathématique.[1] Et la science autrefois la plus indépendante des conditions subjectives[2]

---

de continu spatial de l'autre, se rejoignant finalement dans l'Analyse : développement univoque et unilatéral, conséquence d'une conception générale qui pose en aphorisme fondamental la simplicité des lois de la nature. La profonde libération de la pensée qui s'est produite à ce niveau faisait naturellement croire à un affranchissement définitif, sûr qu'on était de l'immobilité des premiers principes... et de même... de l'immobilité des résultats. L'époque contemporaine annonce une nouvelle libération, aussi profonde peut-être... Elle vise ces 'immuables', ces absolus mathématico-physiques. Plus d'outil qui serve l'intelligence en tout, partout et toujours, si ce n'est l'intelligence elle-même dans sa toute puissance intensive. L'universalisation de la méthode hypothético-déductive, dans sa signification la plus large, en est l'illustration logique. 'Un ordre toujours temporaire et relatif'. Il se dilate à mesure pour correspondre aux relations découvertes en des intuitions plus riches et plus profondes. Il se renouvelle en changeant s'il le faut ses bornes mêmes. La pensée doit constamment être prête à édifier sur nouvelles fondations ou à aménager l'édifice, et partant, à compléter, ajuster et rénover son outillage... De libérations nouvelles, il faut créditer un avenir incertain et imprévisible. La pensée : une expérience sans fin." Il n'existe plus de 'vérité absolue' en mathématiques; plus de repos dans la vérité possédée; c'est l'état de tension et de recherche sans fin et on n'admet comme possible et normal que l'inquiétude de la poursuite. A la vérité objective posée comme fin à atteindre, on a substitué un mouvement sans terme, un élan sans objet.

1. "... Dans un certain sens, on peut dire, avec Evariste Galois, que la méthode mathématique dans les temps modernes 'se rapproche de celle des sciences expérimentales'. Nous avons déjà dit un mot de la méthode des 'approximations successives'; ce terme, à lui seul, aurait déjà fait frémir les Grecs et les cartésiens". F. Le Lionnais, Les Grands Courants de la Pensée Mathématique, p. 240; art. de Paul Germain.

2. Sans doute y a-t-il toujours quelque chose de subjectif en science, même en mathématique et en logique. Le terme 'subjectif' s'entendrait plutôt, dans le présent contexte, comme une propension à juger selon ses dispositions d'esprit, ses opinions ou ses sentiments, sans trop se soucier de la réalité.

se voit maintenant soumise, dans ses principes comme dans ses conclusions, aux interprétations plus ou moins habiles de chaque mathématicien. Et comme, aussi, l'homme juge avec toute sa personne, il arrive que le tempérament ou le sentiment intervienne dans ce domaine abstrait et rende la certitude encore plus fragile.[1]

Une discipline qui ne nous procure ainsi qu'une certitude relative ('la plus absolue, sans doute, de nos certitudes relatives', comme dit Gonseth); une science à la structure si flexible doit-elle s'assimiler à une 'dialectique' ? Précisons, tout d'abord, qu'il faut ici entendre ce terme dans le sens que lui donne Aristote, car "ce mot a reçu des acceptions si diverses qu'il ne peut être utilement employé qu'en indiquant avec précision en quel sens il est pris".[2] Pour Aristote, la dialectique est cette partie de la logique qui traite du syllogisme probable. Ce dernier a comme fin d'engendrer l'opinion[3] et

---

1. Dans le calcul moderne, la notion de certitude semble bien se référer au comportement émotionnel plutôt qu'à l'attitude vraiment scientifique : "... In the present context, you see, certitude would have to be defined by way of interpretation, as in 'I certainly feel too warm,' which should be emotional and therefore not scientific. From this point of view, it can be shown to the satisfaction of any modern logical thinker that, in Euclid's construction of an equilateral triangle, the reason why the two circles intersect is really an emotional one : though muddle-headed in his assumptions he was determined to carry on nonetheless. So that the interpretation of Euclid's geometry really belongs to the province of behaviour, which is unscientific". Charles De Koninck, *Random Reflections on science and calculation*, dans Laval Théologique et Philosophique, 12, 1956.

2. A. Lalande, *Vocabulaire*, p. 218.

3. L'opinion se définit comme l'appréhension d'une proposition immédiate et contingente. L'opinion diffère du 'soupçon' quant à l'objet en ce que, contrairement à ce dernier, elle porte sur l'universel.

non pas la certitude de l'évidence.[1] Car les prémisses dont il se compose ne sont elles-mêmes que probables, c'est-à-dire susceptibles de preuve, et la conclusion résultant de tels principes ne peut jamais être nécessaire ou du moins être connue comme telle.

Dans le syllogisme dialectique, un 'signe' commun remplace le principe propre. Celui-ci se rattache à la nature du sujet et engendre la science. Le principe commun apparaît, au contraire, comme extrinsèque à la nature de la chose et il ne peut, comme tel, que l''indiquer', la 'signifier' de plus ou moins loin. N'étant pas approprié au sujet, le principe probable devient 'commun' à plusieurs choses et ainsi il appartient au domaine logique. Le mode logique se caractérise, en effet, par l'utilisation de 'raisons' communes et probables. Vu que de tels principes débordent le sujet en question, il peut arriver qu'ils ne lui soient pas applicables. Le plan logique et le point de vue 'réel' sont, en effet, loin de toujours se correspondre : le premier voit souvent son universalité mise en échec par les conditions d'une nature particulière.[2] Aussi, quand on utilise des prémisses 'logiques' (c'est-à-dire des principes communs et probables) pour tenter de conclure à la 'réalité', le conséquent n'est jamais

---

1. A noter cependant que la personne qui utilise l'argumentation dialectique poursuit la science et non une connaissance douteuse. Seulement, vu que le principe propre lui échappe, elle recourt à la proposition probable comme 'mode d'approche' des 'raisons' nécessaires. C'est ce désir de parvenir à la vérité qui explique, dans les matières importantes mais difficiles, la multiplication des arguments probables sur un même sujet.

2. S. Thomae, In VI Phys., lect. III, n. 9.

totalement sûr, bien que la conséquence soit, on le suppose, rigoureuse. Car, c'est la matière et non la forme, qui se révèle déficiente dans le syllogisme probable. Si la forme faisait défaut, le raisonnement lui-même serait mauvais.

Vu les caractéristiques du processus dialectique, Aristote le dénomme 'tentatif'. Quiconque l'utilise demeure 'dans le discours'; il ne peut franchir, avec certitude, le domaine de l'intentionnel; sa démarche le laisse 'au stade de l'inquisition' à l'égard du réel. Tant qu'on n'a pas, en effet, découvert le principe propre d'une démonstration, on n'a fait qu'approcher la réalité, on ne l'a pas 'pénétrée'. C'est en multipliant et en diversifiant les modes d'approche, c'est-à-dire les arguments probables, les 'raisons' extrinsèques et communes,[1] qu'on finit, en certains cas, par découvrir le principe propre qui, 'seul', peut conduire à la certitude, terme du mouvement de l'intelligence.

Après avoir rappelé le sens du mot 'dialectique' chez Aristote, il s'agit maintenant d'étudier si l'axiomatique moderne, considérée surtout à son stade le plus évolué, c'est-à-dire au niveau du système formel pur, peut s'assimiler à la dialectique grecque.

---

1. In I Topicorum, c. 5, s. Albert expose comment l'inquisition dialectique peut disposer à la connaissance des principes : "... Et cum via inquirendi et inquisitio sit per rationes probabiles, dit-il, 'fortificatis illis vel multiplicatis' ad unam partem contradictionis cum propriis ipsorum principiis recessus sit relongatio ab altera parte contradictionis : et sic paratur via ad principii cognitionem..."

Il importe, en effet, de déterminer le statut scientifique de la théorie axiomatisée, sous sa forme la plus récente, parce qu'elle joue un rôle essentiel dans la physique moderne, qui fera l'objet du chapitre suivant.

Tout d'abord, la divergence la plus fondamentale qui semble séparer la dialectique et les systèmes formels contemporains paraît se rattacher à la distinction qui s'observe entre la logique matérielle et la logique formelle. Alors que le contenu de la connaissance ou l'objet représenté entre dans la considération de la première espèce de logique, la seconde, au contraire, fait abstraction de la nature des objets connus pour s'en tenir à la forme de l'opération. Or la dialectique constitue une partie de la logique matérielle : elle porte sur la matière probable. La rectitude formelle du raisonnement est présupposée, dans les Topiques. L'axiomatique moderne, contrairement à la dialectique, se désintéresse totalement de la 'nature' des objets mathématiques; elle pose des prémisses arbitraires et, pour la validité de la conclusion, elle s'en remet à l'automatisme de la déduction[1] formelle. Sans vouloir identifier purement et simplement le système axiomatique et la logique formelle (puisque c'est l'ensemble des acquisitions mathématiques et non pas la rigueur du mécanisme logique qui intéresse, en fin de compte, le mathématicien moderne), il reste vrai, cependant, que la théorie axiomatisée accorde la prépondérance à la 'cohérence logique' sur la 'nécessité' de l'objet ma-

1. Voir plus loin le sens que revêt ce mot dans un système moderne.

thématique (nécessité qui n'existe d'ailleurs pas pour un moderne), et que, d'autre part, la légitimité de la conséquence suffit pour justifier la validité du conséquent. Le dialecticien, au contraire, bien que conscient de la rigueur formelle de son raisonnement, ne considère jamais la conclusion comme entièrement valide, puisqu'il s'intéresse à la 'vérité'. La 'nécessité' du 'lien' logique ou de la conséquence ne peut en rien remédier au caractère de 'probabilité' des prémisses. Bref, en dialectique, la rectitude formelle du raisonnement est 'présupposée' et elle joue un rôle 'instrumental' à l'égard de la vérité à connaître; en mathématique moderne, la vertu de la démonstration s'appuie, comme sur un 'principe' adéquat et suffisant, sur la légitimité de l'inférence logique,[1] pour conclure validement; tout s'effectue à la 'lumière' de la pure logique.[2]

De cette première distinction fondamentale entre la dialectique et l'axiomatique moderne, il s'ensuit une multitude d'autres non moins essentielles. Ainsi, en dialectique les 'termes' des propositions comportent une signification précise dont dépend le sens même des principes utilisés (car, encore une fois, ceux-ci sont jugés sur leur contenu); dans la théorie axiomatisée, on note l'inverse. Comme toute la valeur du raisonnement se tire du concept de relation

---

1. Inférence, encore une fois, qui s'assimile, le plus souvent, au lien ténu qui rattache des éléments de calcul.

2. En d'autres termes, la rigueur 'formelle' existe aussi bien en dialectique qu'en mathématiques (modernes); mais celles-ci justifient, pour ainsi dire, la valeur de leurs objets par la rectitude de la seule forme; la dialectique, au contraire, considère à part le 'contenu' de la conclusion et elle en admet le défaut de rigueur.

logique, ce sont les 'axiomes' choisis, ou plus précisément les 'relations' exprimées par les axiomes, qui déterminent le sens des termes qui les composent. Le terme ne désigne plus, en ce cas, une 'nature' précise, mais une 'relation' quelconque. Et dans des systèmes géométriques différents, par exemple, les mêmes termes (v.g. point, ligne, plan...) subiront des variations de sens imputables aux diverses formes de relations exprimées par les postulats. Voilà pourquoi le symbole, plus impersonnel, remplace avantageusement le 'terme'. Pour éviter la confusion qui découle d'un tel relativisme, chaque théorie mathématique exigera, en outre, une étude particulière.

Au relativisme des 'termes' se joint celui des 'principes', en mathématique moderne. Par définition, un système hypothético-déductif se fonde sur de pures conventions. En ce cas, en effet, le 'contenu' des principes et de la conclusion n'importe pas, seule compte la rigueur de la déduction; dès lors, le choix des prémisses ne saurait être influencé par la conclusion à tirer, qu'on ignore totalement. L'arbitraire entre alors en jeu.

Le dialecticien procède autrement. Il se voit limité dans le choix des principes; guidé aussi par le sens de la question à résoudre. Il ne retient donc que les prémisses susceptibles de jeter quelque lumière sur le problème à résoudre.

Au surplùs, la dialectique, tout comme la logique dont elle fait partie, s'intéresse, en définitive, au problème de la 'vérité'. Voilà pourquoi ce mode d'argumentation sert d'instrument à la science pour atteindre le vrai. Moins efficacement sans doute que la démonstration, mais son utilisation demeure inévitable, surtout pendant la période de recherche où l'on procède, par tâtonnement, à la découverte des principes propres.

On a vu, au contraire, que l'axiomatique moderne était finalisée, non par la 'vérité', mais par la cohérence logique. Le vrai, déclarait Russell, est le souci du philosophe; le mathématicien se préoccupe, avant tout, de perfectionner la 'forme', la'structure' de son système.

L'indifférence à l'égard de la vérité s'accompagne, en philosophie des mathématiques contemporaine, du rejet de la notion d'évidence intuitive; puis le concept de certitude passe du contenu à la'structure' logique, ou encore, comme on le rappelait tantôt, des 'principes' à l''instrument'. A partir d'un certain nombre de postulats, tout a été organisé, déclare Russell, de manière à assurer un fonctionnement mécanique.[1] La 'certitude' élémentaire d'un automatisme, ou plutôt l''identité' matérielle qui caractérise la pure répétition, voilà qui suffit pour fonder un système formel.

A ce point de vue encore, la dialectique s'oppose à la théorie axiomatisée. 'Evidence et certitude' se réfèrent, pour le dialecticien, au contenu, à la matière des propositions. Sans doute, l'évidence objective n'existe-t-elle pas en matière probable; la certi-

---

1. B. Russell, Mathematics and the Metaphysicians, p. 1578 : "... Then we set up certain rules for operating on the symbols, and the whole becomes mechanical, etc.

tude non plus. Mais ces deux notions sont sous-jacentes à toutes les considérations du dialecticien, autrement, comment jugerait-il du degré de 'probabilité' de ses propositions et comment, au surplus, pourrait-il avoir l'ambition de parvenir, en fin de compte, à la possession 'claire' et 'sûre' de la vérité ?

Voilà donc les principales divergences qui sépareraient le système formel moderne de la dialectique aristotélicienne. Au fond, les deux processus prennent une orientation différente : la théorie axiomatisée vise, en définitive, à la déduction[1] absolue; dans ce but, elle perfectionne indéfiniment sa symbolique et l'enchaînement de ses termes au strict point de vue de la rigueur formelle; le système mathématique totalement cohérent représentera alors le développement ultime de la logique formelle entendue, toujours, au sens moderne rappelé plus haut. La dialectique se meut, au contraire, dans la sphère du contenu objectif; la validité de l'instrument logique étant présupposée, elle tente de se faire des 'opinions' de plus en plus plausibles sur un objet précis. La vérité 'matérielle' des propositions intéresse, avant tout, le dialecticien; leur vérité 'formelle' ou rigueur de leur enchaînement mutuel préoccupe, au premier chef, le mathématicien moderne.

La dialectique ne saurait, en bref, s'assimiler à un pur système hypothético-déductif. Est-ce à dire, cependant, que ces deux

1. Il faut toujours se rappeler le sens que revêt ce mot pour un moderne. Il s'agit, encore une fois, non pas d'une progression de la connaissance, d'un cheminement de l'esprit de principe à conclusion, mais d'un pur transfert mécanique.

processus scientifiques ne comportent rien de commun ? L'axiomatique, à son stade le plus évolué, ne retiendrait, semble-t-il, du caractère de la dialectique que l'aspect 'provisoire'. Toutes deux se révèlent toujours 'inachevées', susceptibles de progrès. A ce titre, elles sont soumises à des remaniements indéfinis. Hors de là, les deux systèmes paraissent diverger sur des points trop fondamentaux pour que, à notre avis, il soit permis de les confondre.

Les considérations précédentes sur les divergences de la dialectique et de l'axiomatique moderne, nous introduisent au coeur même du chapitre suivant où il s'agit de comparer les sciences moyennes ('scientiae mediae') telles que décrites par Aristote et la physique mathématique.