Dialectica

"In speculativis una est dialectica inquisitiva de omnibus..." I II 57, a 6, ad 3; II II 51, 4, ad 2.

Cum II II 51, a 2, ad 3.

Principia Mathematica
A.N. Whitehead
B. Russell
Vol. I 2e edit. (1925) 2e impress. 1935
Cambridge Univ. Press.

The Foundation of Mathematics
F.P. Ramsay
New York, Harcourt, Brace & Co } 1931
London, Kegan Paul

B. Russell
Principles of Mathematics
Norton, N.Y. nw impression 1938

Hans Reichenbach
Experience & Prediction
Univ. of Chicago Press 1938

La question du fondement des mathém.

On cherche des premiers principes.

Faux probl.

Fond.^{t} = l'être dialectique
(quantitas interminata – matière première.
univoque.

Dist. entre Math. pures et mathém. ordin.

(cf. Bertrand Russel, init.)

Kronecker.

Addition une preuve?

Non. – Isomorphisme.

Conflit intér. à mathém. Signalé par Maritain.

Mat. dial. rejette, parce que mènerait vers sc.

Cette conception entraîne évidemment des difficultés considérables.

P.ex., si $2+2=4$ n'est ~~non~~ ni vrai ni faux, comment se fait-il qu'il est vrai de dire que ~~deux chinois + deux nègres = 4 hommes.~~ 2 hommes + 2 hommes = 4 hommes? C'est que la dernière proposition est prédicationnelle: nous avons ajouté à la pure relation

$2+2=4$

la copule "est": l'expression exacte serait:

2 h + 2 hommes sont égaux à 4 hommes:

nous prédiquons dans cette proposition une ~~égalité~~ relation d'égalité: mais la relation d'égalité n'est pas elle-même une ~~relation~~ proposition prédicationnelle.

~~De là on pourrait conclure~~

On pourrait être tenté de conclure de la vérité: $2h+2h=4h$, que $2+2=4$ est vrai: i.e. que l'expérience prouve la vérité de $2+2=4$.

Cette conclusion supprimerait par le fait même tout l'ordre mathématique et dialectique: celle-ci deviendraient réalistes. Mais, ce qui est plus grave, la prédication deviendrait une pure relation, ou la relation serait une prédication. On rejetterait ainsi ... toute la philosophie.

Voici diffic. dans Russell

Toute proposition de mathém. pure fonction de propo., i. e. indéterm.

Mais son ~~analyse de~~ l'idée de l'être infinit indeterminée.

L'expérience vient limiter

Qu'est ce que l'expér.

Tout axiome a un contr.

Math's sc. in which we never know what.

La perfection de cette mimique. Son unité.

Sa nécessité.

Double tendance → expér.: res

→ sc. ab intra: sc. in intell.

vers { sc. nat
logique.

L'unité de la dialectique

La dialectique comme mimique transcend.

Mathém. Dialectique autonome:

- pas tournée vers réel
- jouit de liberté
- maintient rigueur.
- se rattache ni à l'être ni au non-être
- reste en suspens.

Una I II 57, 6, ad 3.

II 51, 4, ad 2.

Propositions relationnelles et arguments relationnels.

En logique mathém. : élément essentiel de la proposition : la relation des termes.
Les propos. sont essent^t relationnelles.
Les propos. d'inhérence ou prédicat. (Homo est mortalis) ne constituent qu'une espèce dériv.
Pour nous, la proposition est ess^t prédicationnelle : "est" est essentiel : exprime jugement
Ex. Pierre > Jean : ceci dit
— ou : "Pierre plus grand que Jean" — ceci :
ou : désignation d'une relation.
ou : la relation
ou : phrase imparfaite.
— ou : "Pierre est plus grand que Jean." i.e. nous attribuons
« plus grand que Jean » à Pierre.

cf. JSTh. C. Phil. I De Terminis p. 89 et sq.

Dans le premier cas, nous restons dans la première opération de l'esprit.
Mais il y a plus. On peut considérer la proposition 2 fois : "relatio adinoc ab intellectu"
a) Au pdv logique in actu signato : alors on conçoit une relation entre S et P. ≠ V
b) Au pdv du signifié i.e. dans son exercice même : alors "est" n'est pas relation : mais
exprime une identité du S. et du P.
Dans ces distinctions, "Socrate mortel" et "Socrate est mortel"
seraient identiques : donc identité entre 1re et 2e opér. de l'esprit.

STh. Caj. de Ente c 4, (n. 76) édit. Laurent

Donc, faut noter que au point de vue logique, nous rencontrons
la relation des propositions relationnelles : mais pour nous
ce n'est pas en cela que consiste formellement la proposition.
Cependant, ~~l'usage exprès~~ il faut admettre l'usage : ~~[illegible]~~ ~~admettre que~~ mais il faut préciser qu'il s'agit de propositions
relationnelles.
~~Toute proposition dialectique [illegible]~~ a quelque
Or, une propos. dial. n'est pas "judicativa", mais "interrogativa".
Elle n'est "proposition" qu'en tant qu'elle demande l'identité.
De plus : la dial. n'atteint ni adéquatement le réel, ni adéq^t le logique.
Donc, il reste dans ttes ses propos. une certaine indifférence.
Donc, l'élément le plus formellement exprimé c'est la relation : celle-ci
est établie : nous demandons seul^t si nous pouvons passer
à la prédication.

Donc, une proposition relationnelle n'est ni vraie ni fausse. (pas "est")
Donc, une proposition dial. ne peut être ni vraie ni fausse. Elle tend vers → vérité.

<u>Justification de la logique mathématique.</u>

1. <u>La quantité mathématique</u>.

Mathieu, Jures

① Exemple de géométrie pour montrer en quoi consiste le caractère hypothético-déductif des mathématiques — 7pp. (voir p.7) CDK.

② Mathematical Induction 1p. ?

③ A demonstration in Geometry ... 4 pp mimeog.

postulats de la géométrie projective.

I. Si Aet B sont des points distincts sur un plan, il y a au moins une ligne contenant à la fois A et B.

II. Si A et B sont des points distincts sur un plan, il n'y a pas plus qu'une ligne contenant à la fois A et B.

III. Deux lignes quelconque d'un plan ont au moins un point du plan en commun.

IV. Il y a au moins une ligne sur un plan.

V. Toute ligne contient au moins trois points sur un plan.

VI. Tous les points ~~xxx~~d'un plan n'appartiennent pas à la même ligne.

VII. Aucune ligne ~~ne~~ contient plus que trois points du plan.

Les points, lignes, et plan peuvent être ~~n'importe quoi~~ des entités quelconques, indéterminées sinon par les relations énoncées dans les postulats.

Nous pouvons donc ~~éliminer~~ supprimer toute référence à des points, lignes et ~~espace~~ plans, éliminant ainsi toute appel à l'intuition spatiale dans la dérivation de plusieurs théorèmes à partir de ces postulats.

Remplaçons les lettres suivants par les symboles suiv.:

plan = S (ensemble de points)

point = élément de S

lingne = classe L (classe de points, ou sous-classe de S.)

I′ Si A et B sont des éléments distincts de S, il y a au moins une classe-l contenant à la fois A et B.

II′ Si A et B sont des éléments distincts de S, il n'y a pas plus d'une classe-l contenant à la fois A et B.

III′ Deux classes-l quelconques ont au moins un element de S en commun.

IV′ Il existe au moins une classe-l en S.

V′ Toute classe-l contient au moins trois éléments de S.

VI Tous les éléments de S n'appartiennent pas à la même classe-l.

VII Aucune classe-l contient plus que trois éléments de S.

En tout cela, plus de référence à des propriétés spatiales. Aucun des axiomes vrai ou faux.
Les symboles S, classe-C, A, B, sont des variables: des fonctions de proposition, et non des propositions, à moins qu'on leur assigne une valeur spécifique.

Les postulats sont des relations entre des termes ~~indéf~~ non-définis
Les termes peuvent désigner n'importe quoi, pourvu que ce qui est désigné se conforme aux relations entre elles.

Vous voyez ici la diff entre cette façon de procéder et celle d'Euclide qui définissait explicitement les points, lignes etc ---

Voici maintenant une démonstration de six théorèmes, dont certains ne seront pas de vulgaires conséquences des postulats :

Théorèmes

I Si A et B sont des éléments distincts de S, il y a une et une seule classe-l contenant à la fois A et B. Appelons la classe-l AB.

Conség. immed. des postulats I' et II'.

II Deux classes-l distincts quelconques ont un et un seul élément de S en commun.

Conség. des postulats II' et III'.

III Il existe trois éléments de S qui ne sont pas tous dans la même classe-l.

Conség. imméd. de IV', V', et VI'.

IV Toute classe-l en S ne contient que trois éléments de S.

Conség. de V' et VII'.

V Une classe S quelconque qui est sujet aux postulats I' à VI' inclusivement, contient au moins sept éléments.

Preuve :

Preuve du Th. V :

Que A, B, et C soient trois éléments de S non pas dans la même classe-l. (Ceci possible par Th. III) Il doit y avoir alors 3 classes-l distincts, contenant AB, BC, et CA, par le Th. I. De plus, chacune de ces classes-l doit avoir un élément additionnel, par le postulat -. Et ces éléments additionnels doivent être distincts les uns des autres, et de A, B, C, par le postulat II

Désignons ces éléments additionnels par D, E, et G, de sorte que ABD, BCE, et CAG ~~forment~~ constituent les différentes classes-l mentionnées. Or, AE et BG déterminent aussi des classes-l, qui doivent être distincts de n'importe quelles classes-l déjà mentionnées, par le postulat I'. Et ils doivent avoir un élément de S en commun, par le postulat IV', qui distinct de n'importe quel élément énuméré déjà, par le postulat II'. Appelons le F, de sorte que AEF et BFG sont des classes-l.

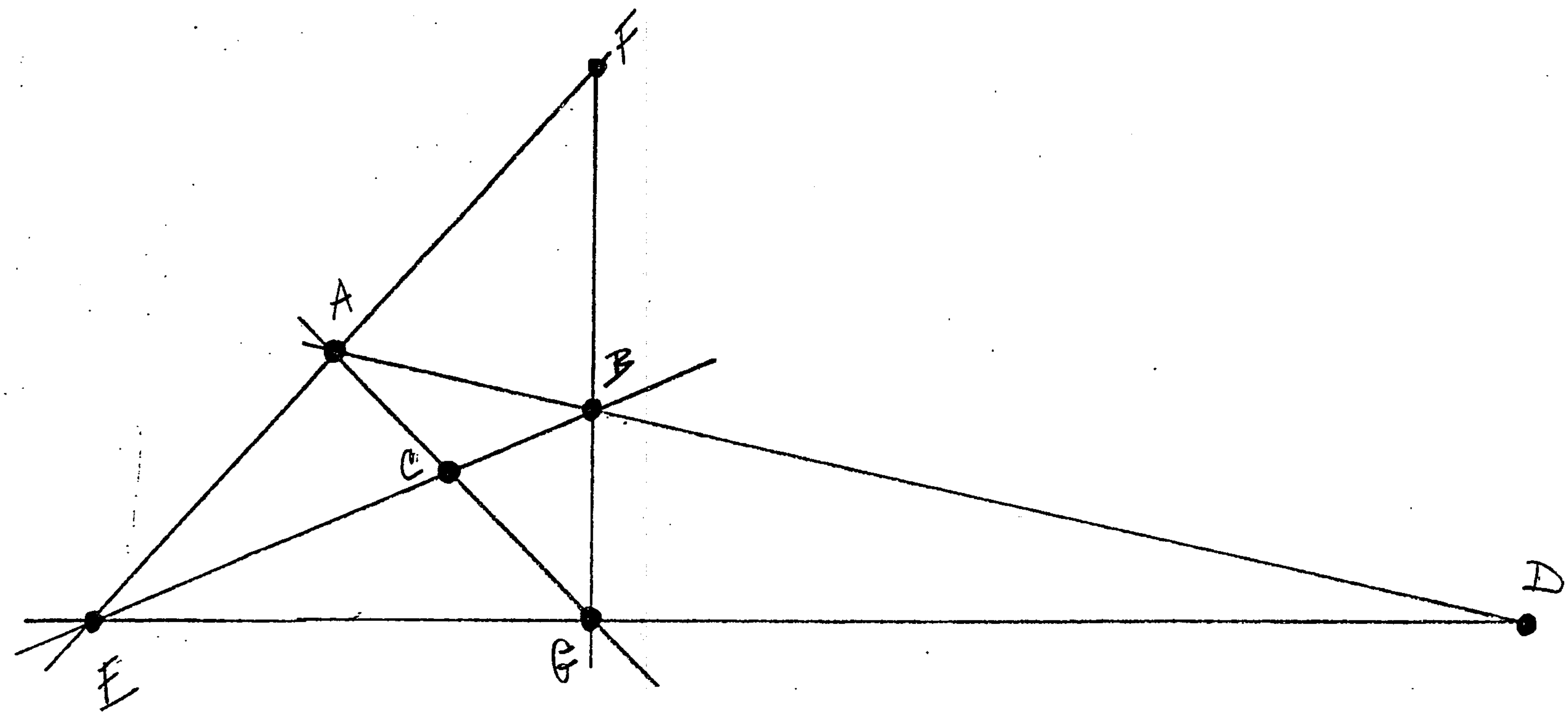
Donc il y a <u>au moins</u> 7 éléments de S.

Théorème VI. La classe S, sujet aux sept postulats, ne contient pas plus que sept éléments.

Preuve: Supposons qu'il y ait un 8e élément T. Alors, la classe-l déterminée par AT et BFG devrait avoir un élément en commun, par le postulat III'. Mais cet élément ne peut être B; car les éléments AB déterminent la classe-l dont les éléments sont ABD, de sorte que ABTD devraient appartenir à cette même classe-l; ce qui est impossible par le postulat VII'. — Cet élément ne peut pas non plus être F, puisque AFTE devraient alors appartenir à la classe-l AEF; ni G, car AGTC devrait appartenir à la classe-l AGC. Les résultats sont également impossibles par le postulat VII'.

Par conséquent, puisque l'existence d'un 8e élément serait en contradiction avec le post. VII', pareil élément ne peut exister.

Vous voyez par cet exemple en quoi consiste le caractère hypothético-déductif des mathématiques. Cette déduction n'a ~~pas~~ de recours ni à l'expérience ou l'observation, ni à des éléments sensibles. Y a-t-il quelque chose qui réponde à cela dans la réalité ? Ce n'est pas au mathématicien de le dire.


F
A
B
C
D
E
G

MATHEMATICAL INDUCTION

We shall show, by means of an example, that mathematical induction is a deduction.

To show that $1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ where n may be any number.

It is evident that when $n=1$, we have $1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$ and so the general formula is true when applied to this case.

It is also evident that when $n=2$, we have $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$ or $3=3$, and so the general formula is true when applied to this case.

Again, when $n=3$, we have $1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$, or $6=6$, and so the general formula is true when applied to this case.

If we proceed this way, proving for each case, we shall never be able to finish all the numbers because they are infinite, and consequently, we shall not be able to prove the general formula. And if the numbers were finite, even then, by proving for each number till they are exhausted, we would have a proof by a complete induction, i.e. by an enumeration of all cases, and such a proof would not be a proof depending upon the nature of a number. We shall seek, then, a proof which depends upon the nature of a number.

Since a number (i.e. any number) is finite and discrete, it is numerable, that is, it can be exhausted if the units are taken from it one by one. If we arrange the numbers in a sequence thus, 1,2,3,4,...,n,..., it is evident that any number, let us say n, can be reached by starting from 1, since the numbers up to n are as many as the units of n and since the units of n can be exhausted as we said before. If now the general formula is not true for any number, there is a number for which it is not true. Let us call this number m. This number m, either is the smallest number for which the general formula is not true or is not the smallest. If it is not the smallest, then there is another number, smaller than m, for which the general formula is not true. Let it be k. Again, k is either the smallest for which the general formula is not true or is not. If it is not, there is a smaller one, say j. Since, starting from m, and goi towards 1, we traverse a finite number of steps, it is evident that there must be a smallest number for which the general formula is not true, for if there were no smallest number, we would be retreating towards 1 without ever reaching it. Let then the smallest number, or first number, for which the general formula is not true, be called b. It is evident, then, that the general formula is true for each number up to and including $b-1$. Thus, on the hypothesis that the general formula does not hold for each number, we must have the following:

(A) $$1+2+3+4+\ldots+(b-1)+b \neq \frac{b(b+1)}{2}$$

(B) $$1+2+3+4+\ldots+(b-1) = \frac{(b-1)(b)}{2}$$

Now the parts of (A) are unequal, and those of (B) are equal. Since equals subtracted from unequals the results are unequal, subtracting the parts of (B) from the parts of (A), we must have

$$b \neq \frac{b(b+1)}{2} - \frac{(b-1)b}{2}$$

But $\frac{b(b+1)}{2} - \frac{(b-1)b}{2} = \frac{b(b+1)-(b-1)b}{2} = \frac{b^2+b-b^2+b}{2} = \frac{2b}{2} = b$

Therefore $b \neq b$

This being impossible, it is false to say that the general formula is not true for ~~all~~ every number. Thus, the general formula must be true for any number. (For this proof we have used properties of, and principles about, number

Analogical naming

There is an apparent discrepancy between St.Thomas's teaching on naming by analogy in Metaph.V,lect.8, De Veritate II,lect.11, De Potentia 7,a.7,and Ia Pars,XIII,a.5.

I.In Metaph.V,8,he says that those things are one in proportion or analogy such that this is to that as one thing is to another. Then he goes on to distinguish two modes of proportion:

(a)there is the case where two things are related differently to something one: thus healthy is said of urine signifies the relation of sign of health (habitudinem signi sanitatis); it is said of medicine because medicine signifies the relation of cause of health. Both relate to the same thing,which a third, namely health which is in the animal,and not either in sign or cause.

(b)there is a different case,where the proportion is that of two things to diverse things,such as the stillness of the sea to the serenity of the air. For stillness is the quiet of the sea,and serenity the quiet of the air. ((Note,here,that the name which is said analogically is 'quiet.'))

II. In de Veritate,II,11,he distinguishes a twofold convenientia according to proportion,and accordingly of analogical community.

(a)There is a convenientia between things which have a proportion one to the other because of a determinate distance between them or because of some other relatedness(habitudo),such as that of the number two to the unit,for it is twice the unit.((Notice that only two terms are involved here: the number two and the unit.))

(b)But there can also be a convenientia of two things one

2

to the other between which there is no proportion, but rather a similitude of two proportions one to the other, in the way that the number six resembles the number four inasmuch as six is three twice over, and four twice two.

Notice now that he calls the first a 'convenientia proportionis,' . the sedond 'convenientia pmoportionalitatis.'

(a) As an instance of the first, where something is said analogically of two things, one of which is related to the other, he cites 'being' as said of substance, and of accident, because of the relation of one to the other; and in this way 'healthy' was said of urine and of the animal, because urine has a certain similitude with the health of the animal.

(b) The second kind of proportion is illustrated by the name 'sight' which is said of eyesight and of understanding, because the way sight is in the eye, so is understanding in the ~~intellect~~ mind.

St. Thomas then goes on to exclude the first kind of proportion from divine naming because it implies a 'determinata habitudo' between the things ~~xxxxxxx~~ which have something in common by proportion. For no creature has that kind of proportion to God, by which a divine perfection would be determined.

But in the second mode of proportion, which he had called proportionalit no determinate 'habitudo' between those things which have something in common by way of proportion; hence, according to this mode, a name may be said analogically of God and of creature. ((Note how he explained this in the ad 4m.))

III. The De Potentia, VII, 7, appears to offer a different doctrine. St. Thomas there distinguishes two ~~kinds of~~ modes of analogical predication:

(a) One in which something is predicated of two things with respect to a third, in the way being is said of quality and quantity with respect to a third something, viz. substance.

(b) Then there is another mode, according to which something is predicated of two ~~thigx~~ things one with respect to the other. ((There is not third here.)) In this way, 'being' is said of substance and quantity.

The St. Thomas applies this distinction to the case in point.

(a) He excludes the first ('ens de qualitate et quantitate per respectum ad substantiam', or 'sanum de medicina et urina per respectum ad animal'). The reason is that in this case there must be a third that is prior to the two things of which semthing is said tith respect to that third. And so there would have to be something prior to God.

(b) But according to the second mode, no third thing is implied; what is implied is that one of the two things of which someth is said by analogy is prior to othe other, as substance is prior to accident, and health in the animal prior to that which we predicate of medicine.

((Notice, then, that St. Thomas here seems to concede the ~~[illegible]~~ mode which he rejects in the De Veritate.))

IV. Now the Ia Pars, XIII, 5. St. Thomas makes the following distinction: In the case of naming, to be said by analogy occurs in two ways:

(a) Either when many things have a proportion to one thing, in the way that health is said of madicine and urine inasmuch as they have an order and proportion to the health of the animal. ((Think of the other instance: quality and quantity are called being with respect to subatance. Hence, this is the case where a third, prior, term is implied, so that it will not be true of divine naming.))

(b) But there is also the case where one thing is in proportion to another, in the way health is said of animal and medicine, ((of substance and of accident)). And in this way some things are said of God and creature.((Notice that this was excluded in De Potentia,VII,7,because of the 'determinata distantia'.) The reason why this applies here is that we cannot name God except from creatures,namely according to an order from creature to God as principle and cause of the creture.

Now,St.Thomas adds,a name which is thus said in many ways,signifies different proportions to something one, in the way 'healthy'said of urine signifies a sign of health in the animal,and,said of medicine,it signifies a cause of ~~healthy~~ that same health,namely that of the animal. ((So,here we appear to have a'tertium quid' which was excluded above. But the point is that the'tertium quid' is precisely God. A.v.,'ens,' 'bonum,' and 'vivens' are not said of God and creature with respect to a third something that is neither,in the way health is said of medicine and urine with respect to the animal,or 'being'of qualitity and quantity. No.'Being' will be said of God first,somewhat in the way in which it is said first of substance,but not quite in this way: the order of 'prius' and 'posterius' is right, but the'determinata distantia' is wrong.This distance is excluded by 'proportionality.' It must be excluded because the 'ratio deitatis' is not included in the 'ratio creaturae',which was the case of accident including the ratio substantiae as that in which the accident inhere and without which the accident cannot be defined. This was brought out in De Veritate II,11,ad 4m.))

L'abstraction S.d.

Utrum mathematica consideratio sit sine motu et materia.
In Boethium, De Trin., q. 5, a 3.

5 pp. dactyl.
Ibid 5 pp. miméog.

1 p. sur les ~~[illegible]~~ abstractions propres aux sciences
travail sur les 3 degrés d'abstraction – auteur? ~~peut-être [illegible]?~~
21 pp.